

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 4 (40)

2016

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Тактаров Н. Г., Кормилицин А. А., Лемясева Н. А.</i> Поперечные волны в вязкой жидкости, вызванные вращательным колебательным движением пористого шара	3
<i>Сандлер И. Л.</i> Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем при наличии автокоррелированных помех во входных и выходных сигналах	14
<i>Валовик Д. В., Демченко А. Е.</i> Об одном подходе к задаче дифракции поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом слое, заполненном нелинейной средой	28
<i>Султанова Г. А.</i> Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта	38
<i>Басинский К. Ю.</i> Образование волн на поверхности жидкости при обтекании кругового цилиндра	51
<i>Алехина М. А.</i> Об асимптотически оптимальных по надежности схемах при неисправностях элементов	60
<i>Долгарев А. И.</i> Нормальные векторы евклидовых многомерных поверхностей	68

ФИЗИКА

<i>Журавлев В. М.</i> О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками	84
<i>Васин А. С.</i> Моделирование структурных свойств сплавов $Ge_{1-x}Sn_x$	102
<i>Грунин А. Б., Кириллов И. А.</i> Особенности электропроводимости квантовых проволок, связанные с электростатической ионизацией $D^{(-)}$ -состояний	114

**UNIVERSITY PROCEEDINGS
VOLGA REGION
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 4 (40)

2016

CONTENT

MATHEMATICS

<i>Taktarov N. G., Kormilitsin A. A., Lemyaseva N. A.</i> Transverse waves in a viscous fluid induced by rotating oscillations of a porous sphere	3
<i>Sandler I. L.</i> Recurrent estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of linear dynamic systems in the presence of autocorrelated noises in input and output signals.....	14
<i>Valovik D. V., Demchenko A. E.</i> On one approach to the problem of polarized electromagnetic waves diffraction on a dielectric layer filled with a nonlinear medium	28
<i>Sultanova G. A.</i> On Lie algebras of infinitesimal affine transformations in tangent bundles with a complete lift connection	38
<i>Basinskiy K. Yu.</i> Occurrence of waves on the surface of fluid flowing in a circular cylinder.....	51
<i>Alekhina M. A.</i> On circuits being asymptotically optimal by reliability in cases of gate failures	60
<i>Dolgarev A. I.</i> Normal vectors of euclidean multidimensional surfaces	68

PHYSICS

<i>Zhuravlev V. M.</i> On multidimensional nonlinear equations associated with Laplace and heat conduction equations by means of functional Substitutions.....	84
<i>Vasin A. S.</i> Modeling of structural properties of $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ alloys	102
<i>Grunin A. B., Kirillov I. A.</i> Features of electrical conductivity of quantum wires, connected with the electrostatic ionization of $D^{(-)}$ -states.....	114

УДК 532.685

DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-1

Н. Г. Тактаров, А. А. Кормилицин, Н. А. Лемясева

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПОРИСТОГО ШАРА

Аннотация.

Актуальность и цели. Изучение движения жидкостей через пористые материалы представляет значительный интерес для исследования природных явлений, а также технологических процессов. В настоящей статье рассматривается движение вязкой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением пористого шара в жидкости, помещенной в концентрическую с шаром непроницаемую сферическую оболочку.

Материалы и методы. Для решения задачи используются методы математической физики и векторного анализа. Задача решается в сферической системе координат с началом в центре шара. Для построения графиков использованы численные методы.

Результаты. Определено движение вязкой жидкости внутри и вне пористого шара. Получены точные аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана в области внутри шара и уравнения Навье – Стокса – вне шара.

Выводы. Показано существование внутренних поперечных волн в жидкости, в которых скорость перпендикулярна направлению распространения волны. Внутри шара скорость жидкости изменяется от нуля в центре до некоторого значения на его поверхности. А вне шара скорость изменяется до нуля при удалении от его поверхности. На поверхности шара скорость непрерывна.

Ключевые слова: пористая среда, вязкая жидкость, уравнение Бринкмана, поперечные волны.

N. G. Taktarov, A. A. Kormilitsin, N. A. Lemyaseva

TRANSVERSE WAVES IN A VISCOUS FLUID INDUCED BY ROTATING OSCILLATIONS OF A POROUS SPHERE

Abstract.

Background. The studying of the fluid motion through porous media is of a significant interest for investigation of natural phenomena and technological processes. The paper considers the motion of a viscous fluid induced by rotating oscillations of a porous sphere in the fluid that is immersed in a nonpermeable concentric spherical shell.

Materials and methods. We used the methods of mathematical physics and vector analysis. The problem was solved in a spherical coordinate system. For graphs constructing we used numerical methods.

Results. The study has determined the motion of viscous fluid inside and outside of the porous sphere. Exact solutions have been obtained for the nonsteady Brinkman equations inside of the porous sphere and for Navier-Stokes equations outside one.

Conclusions. The work proves the existence of intrinsic transverse waves, the velocity of which is perpendicular to the direction of their propagation. Inside of the porous sphere the velocity is changing from zero in the centre to a certain value at the surface. Outside the sphere the velocity is changing to zero when moving away from the surface. At the surface of the sphere the velocity is continuous.

Key words: porous medium, viscous fluid, Brinkman's equation, transverse waves.

Введение

Изучение движения жидкостей через пористые материалы представляет значительный интерес для исследования природных явлений, а также многих технологических процессов. При наличии свободной поверхности жидкости на ней могут возникать поверхностные волны, на распространение которых оказывает влияние пористая среда, контактирующая с жидкостью. Поверхностные волны в слое жидкости на пористом основании рассматривались, например в [1]. Наряду с поверхностными волнами в вязкой жидкости могут также существовать внутренние поперечные волны, вызванные колебанием погруженных в нее твердых тел. В частности, в [2] рассмотрены поперечные волны, вызванные движением плоской поверхности, контактирующей с жидкостью и совершающей колебания в своей плоскости, а также волны, возникающие при движении сплошного твердого шара, погруженного в жидкость и совершающего вращательные колебания вокруг оси, проходящей через его центр. В настоящей работе рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением погруженного в нее пористого шара вокруг стационарной оси вращения, проходящей через его центр. Жидкость вместе с шаром помещена в концентрическую с шаром неподвижную непроницаемую сферу.

1. Постановка задачи

Пористая среда (матрица), насыщенная жидкостью, предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость (близкую к единице) и высокую проницаемость. Такими свойствами могут обладать, например, волокнистые, а также сильно вспененные металлические материалы, у которых коэффициент проницаемости достигает 10^{-4} см² [3]. При таких свойствах пористой матрицы в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости может заметно отличаться от скорости матрицы.

Угловую скорость вращения шара запишем как функцию от времени t^* в виде $\Omega^* = \Omega_0 \exp(-i\omega t^*)$, где Ω_0 – постоянный действительный вектор, ω – частота колебаний шара. Знаком «^{*}» здесь и далее обозначаются размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличить их от соответствующих безразмерных, обозначаемых теми же буквами.

Пусть a и b – радиусы пористого шара и непроницаемой сферы соответственно ($a < b$), η – вязкость свободной жидкости, ρ – ее плотность. Предполагая малым число Рейнольдса ($\rho\Omega_0 a^2/\eta \ll 1$) и отбрасывая нелинейные слагаемые в ускорении, систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) запишем в следующем виде [4–6]:

$$\frac{\rho \partial \mathbf{u}_1^*}{\Gamma \partial t^*} = -\nabla^* p_1^* + \eta' \nabla^{*2} \mathbf{u}_1^* + \mathbf{F}^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0, \quad (1)$$

здесь Γ – пористость ($\Gamma = \text{const}$); \mathbf{u}_1^* – макроскопическая скорость фильтрации ($\mathbf{u}_1^* = \Gamma \mathbf{v}_1^*$, где \mathbf{v}_1^* – средняя по объему пор скорость); p_1^* – среднее по объему пор давление; η' – эффективная вязкость жидкости в порах; \mathbf{F}^* – плотность силы сопротивления пористой матрицы, точки которой с радиус-векторами \mathbf{r}^* , отложенными от центра шара, движутся со скоростями $\mathbf{v}^* = \Omega^* \times \mathbf{r}^*$:

$$\mathbf{F}^* = -\frac{\eta}{K} (\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*),$$

$\mathbf{u}^* = \Gamma \mathbf{v}^*$; K – коэффициент проницаемости пористой матрицы.

Если $K \rightarrow 0$, то из (1) следует, что $\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}^*$, т.е. жидкость движется вместе с пористой матрицей как единое целое. При сделанном предположении, что пористость достаточно велика, примем, что $\eta' = \eta$ [4].

Уравнения движения свободной (вне шара) жидкости при сделанных предположениях (приближение Стокса) имеют обычный вид [2]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_2^* + 3 \nabla^{*2} \mathbf{u}_2^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0. \quad (2)$$

Индексами 1 и 2 обозначаются величины, относящиеся к областям внутри и вне пористого шара соответственно.

Частицы жидкости будут двигаться по окружностям с центрами на оси вращения. Вследствие осевой симметрии относительно оси вращения градиент движения в касательном к этим окружностям направлении будет равен нулю. Поэтому давление выпадет из уравнений движения (1), (2).

Введем сферическую систему координат (r^*, θ, φ) с началом в центре шара. Полярная ось z^* этой системы направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_0 = \Omega_0 / |\Omega_0|$. Угол θ отсчитывается от положительной полуоси z^* . От азимутального угла φ величины не зависят вследствие осевой симметрии.

Граничные условия на поверхности пористого шара $r^* = a$ [7, 8]:

$$u_{\varphi 1}^* = u_{\varphi 2}^*, \quad \Lambda (\sigma_{r\varphi 1}^* - \sigma_{r\varphi 2}^*) = \eta (u_{\varphi 1}^* - v_{\varphi}^*), \quad (3)$$

на поверхности неподвижной сферы $r^* = b$: $u_{\varphi 2}^* = 0$.

Здесь Λ – постоянная с размерностью длины; $\sigma_{r\varphi j}^*$ – компонента тензора напряжений в сферических координатах ($j = 1, 2$):

$$\sigma_{r\varphi j}^* = \eta \left(\frac{\partial u_{\varphi}^*}{\partial r^*} - \frac{u_{\varphi}^*}{r^*} \right)_j.$$

Если пористость значительно отличается от единицы, то в тензоре напряжений в областях 1 и 2 должна стоять вязкость η' и η соответственно.

При $\Lambda \rightarrow \infty$ из (3) следует условие непрерывности касательных напряжений, а при $\Lambda \rightarrow 0$ – условие отсутствия проскальзывания жидкости на поверхности пористой матрицы: $u_{\varphi 1}^* = v_{\varphi}^*$.

2. Решение задачи

Введем безразмерные переменные:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* / a, t = t^* \omega, \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^* / v_0, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^* / v_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}^* / v_0 = \Gamma(\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}) \exp(-it),$$

здесь $v_0 = \Omega_0 a$.

Уравнения (1), (2) в безразмерном виде:

$$\frac{\omega a^2}{\Gamma \nu} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{u}_1 - \frac{a^2}{K} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (4)$$

$$\frac{\omega a^2}{\nu} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{u}_2, \quad \nabla \mathbf{u}_2 = 0. \quad (\nu = \eta / \rho).$$

Безразмерные граничные условия:

– при $r = 1$:

$$u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \lambda \left(\frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial r} - \frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial r} \right) = u_{\varphi 1} - v_{\varphi}; \quad (5)$$

– при $r = R$:

$$u_{\varphi 2} = 0,$$

здесь $\lambda = \Lambda/a$, $v_{\varphi} = \exp(-it) \sin \theta$, $R = b/a$.

Скорость \mathbf{u}_1 ищется в виде [2]:

$$\mathbf{u}_1 = \exp(-it) \nabla \times [\mathbf{e}_0 f_1(r)] = -\exp(-it) \mathbf{e}_0 \times \nabla f_1(r),$$

здесь $f_1(r)$ – скалярная функция от $r = |\mathbf{r}|$.

Из (4) следует

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 + m_1^2 \mathbf{u}_1 = -\frac{2}{\Gamma} \left(\frac{a}{\delta_1} \right) \mathbf{u}, \quad (6)$$

здесь $m_1^2 = (2/\Gamma) \left[i(a/\delta_2)^2 - (a/\delta_1)^2 \right]$, $\delta_1 = \sqrt{2K/\Gamma}$, $\delta_2 = \sqrt{2\nu/\omega}$, где δ_1 ,

δ_2 – постоянные с размерностью длины.

Из (6) следует

$$\nabla^2 f_1(r) + m_1^2 f_1(r) = (a/\delta_1)^2 r^2 + \text{const}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$f_1(r) = A_1 \frac{1}{r} \exp(im_1 r) + B_1 \frac{1}{r} \exp(-im_1 r) + Cr^2, \quad (7)$$

$$m_1 = (a/\sqrt{\Gamma})(1/\delta + i\delta/\delta_2^2), \quad 1/\delta^2 = -1/\delta_1^2 + \sqrt{1/\delta_1^4 + 1/\delta_2^4},$$

$$C = (\Gamma / 2) / \left[i(\delta_1 / \delta_2)^2 - 1 \right],$$

здесь A_1, B_1 – произвольные постоянные.

Поскольку скорость выражается через ∇f_1 , аддитивная постоянная в (7) отброшена. Для того чтобы решение было конечным при $r \rightarrow 0$, следует положить $B_1 = -A_1$.

Скорость \mathbf{u}_2 ищется в виде

$$\mathbf{u}_2 = \exp(-it) \nabla \times [\mathbf{e}_\varphi f_2(r)].$$

Согласно (4) \mathbf{u}_2 удовлетворяет уравнению

$$\nabla \mathbf{u}_2 + m_2^2 \mathbf{u}_2 = 0 \quad (m_2^2 = 2i(a/\delta_2)^2).$$

Отсюда следует: $\nabla^2 f_2(r) + m_2^2 f_2(r) = \text{const}$.

Общее решение этого уравнения:

$$f_2(r) = A_2 \frac{1}{r} \exp(im_2 r) + B_2 \frac{1}{r} \exp(-im_2 r), \quad m_2 = (1+i)(a/\delta_2).$$

Здесь аддитивная постоянная в решении отброшена.

Определяя постоянные A_1, A_2, B_2 из граничных условий (5), находим с учетом равенства $\mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \sin\theta$ ($\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$):

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_\varphi e^{-it} F_1(r) \sin\theta, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_\varphi e^{-it} F_2(r) \sin\theta, \quad (8)$$

$$F_1(r) = -\frac{2iA_1}{r} \left(m_1 \cos m_1 r - \frac{1}{r} \sin m_1 r \right) - 2Cr,$$

$$F_2(r) = -A_2 \left(\frac{im_2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) (\cos m_2 r + i \sin m_2 r) + B_2 \left(\frac{im_2}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (\cos m_2 r - i \sin m_2 r).$$

Здесь коэффициенты A_1, A_2, B_2 определяются равенствами:

$$A_1 D = \left[C \left(m_2^2 + 3im_2 - 3 - \frac{im_2 - 1}{\lambda} \right) - \frac{im_2 - 1}{2\lambda} \right] (i - m_2 R) \exp[-im_2(R-1)] -$$

$$- \left[C \left(m_2^2 - 3im_2 - 3 + \frac{im_2 + 1}{\lambda} \right) + \frac{im_2 + 1}{2\lambda} \right] (i + m_2 R) \exp[im_2(R-1)],$$

$$A_2 D = \left[\left(6C - \frac{1}{\lambda} - 2Cm_1^2 \right) \sin m_1 + \left(\frac{m_1}{\lambda} - 6Cm_1 \right) \cos m_1 \right] (im_2 R + 1) \exp(-im_2 R),$$

$$B_2 D = \left[\left(\frac{m_1}{\lambda} - 6Cm_1 \right) \cos m_1 - \left(\frac{1}{\lambda} + 2C + 2Cm_1^2 \right) \sin m_1 \right] (im_2 R - 1) \exp(im_2 R),$$

$$D = \left[\left(m_1 m_2^2 - \frac{im_1 m_2 - m_1}{\lambda} \right) \cos m_1 - \left(m_2^2 - m_1^2 + im_1^2 m_2 - \frac{im_2 - 1}{\lambda} \right) \sin m_1 \right] \times$$

$$\times (im_2 R + 1) \exp[-im_2(R-1)] + \left[\left(m_1 m_2^2 + \frac{im_1 m_2 + m_1}{\lambda} \right) \cos m_1 - \right.$$

$$-\left(m_2^2 - m_1^2 - im_1^2 m_2 + \frac{im_2 + 1}{\lambda}\right) \sin m_1 \left[(im_2 R - 1) \exp[im_2 (R - 1)] \right].$$

В формулах для скоростей везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

При $R \rightarrow \infty$ выражения (8) для скоростей принимают вид

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_\varphi \left[\frac{2iA_1'}{r} \left(m_1 \cos m_1 r - \frac{1}{r} \sin m_1 r \right) + 2Cr \right] \exp(-it) \sin \theta,$$

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_\varphi \frac{A_2'}{r^2} \exp[i(m_2 r - t)] (im_2 r - 1) \sin \theta, \quad (9)$$

$$A_1' = \frac{C}{D'} \left[im_2^2 - 3m_2 - 3i + \frac{m_2 + i}{\lambda} \right] + \frac{m_2 + i}{2\lambda D'},$$

$$A_2' = \frac{(m_1 \cos m_1 - \sin m_1) / \lambda - 2C[(m_1^2 - 3) \sin m_1 + 3m_1 \cos m_1]}{D' \exp(im_2)},$$

$$D' = \left[m_1^2 - m_2^2 - im_1^2 m_2 + \frac{im_2 - 1}{\lambda} \right] \sin m_1 + \left[m_1 m_2^2 - \frac{m_1 (im_2 - 1)}{\lambda} \right] \cos m_1.$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$A_1' = \frac{C}{D'} (im_2^2 - 3m_2 - 3i),$$

$$A_2' = -\frac{2C}{D' \exp(im_2)} \left[(m_1^2 - 3) \sin m_1 + 3m_1 \cos m_1 \right], \quad (10)$$

$$D' = (m_1^2 - m_2^2 - im_1^2 m_2) \sin m_1 + m_1 m_2^2 \cos m_1.$$

Переход в (9) к пределу $\lambda \rightarrow 0$, $K \rightarrow 0$ равносильен замене пористого тела непроницаемой для жидкости средой. При этом в (9) следует положить

$$m_1 = \frac{ia}{\sqrt{K}}, \quad m_2 = ak_2, \quad \left(k_2 = \frac{1+i}{\delta_2} \right),$$

а затем перейти к пределу $K \rightarrow 0$.

В этом пределе \mathbf{u}_1 принимает вид $\mathbf{u}_1 = \Gamma \mathbf{e}_\varphi r \exp(-it) \sin \theta$, или в размерном виде: $\mathbf{u}_1^* / \Gamma = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^* \exp(-i\omega t^*)$, а \mathbf{u}_2 – вид:

$$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}) \frac{1 - iak_2 r}{r^3 (1 - iak_2)} \exp[iak_2 (r - 1) - it].$$

Это выражение в размерном виде совпадает со скоростью жидкости, движение которой вызвано вращательным колебательным движением сплошного твердого шара [2, § 24]. В пределе $K \rightarrow 0$ пористую матрицу можно

представить как состоящую из не связанных между собой пор и не пропускающей жидкость через себя. При этом жидкость в порах движется вместе с матрицей как твердое тело со скоростью $\mathbf{v}^* = \mathbf{u}_1^* / \Gamma$.

Согласно (8) и (9) выражения для скоростей \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 имеют вид поперечных затухающих волн, в которых скорость перпендикулярна направлению распространения волны (т.е. вектору \mathbf{e}_r)

3. Частные случаи

1. Рассмотрим случай узкого зазора между поверхностью пористого шара и непроницаемой сферой ($R = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$) при условии $\lambda \rightarrow \infty$. Оставляя слагаемые первого порядка малости по ε в разложениях соответствующих функций в ряды, получим выражения для коэффициентов в (8):

$$\begin{aligned} A_1 &= -2Cm_1^3(1+3\varepsilon)/D, \\ A_2 &= -2C(im_2+1+m_2^2\varepsilon)\left[(m_1^2-3)\sin m_1+3m_1\cos m_1\right]\exp(-im_2)/D, \\ B_2 &= -2C(im_2-1-m_2^2\varepsilon)\left[(1+m_1^2)\sin m_1+3m_1\cos m_1\right]\exp(im_2)/D, \\ D &= (im_2+1+m_2^2\varepsilon)\left[(m_1^2-m_2^2-im_1^2m_2)\sin m_1+m_1m_2^2\cos m_1\right]+ \\ &+ (im_2-1-m_2^2\varepsilon)\left[(m_1^2-m_2^2+im_1^2m_2)\sin m_1+m_1m_2^2\cos m_1\right]. \end{aligned}$$

2. В пределе $\omega \rightarrow 0$ (т.е. $\delta_2 \rightarrow \infty$), $K \rightarrow 0$ (т.е. $\delta_1 \rightarrow 0$), $\lambda \rightarrow 0$ скорость жидкости в порах \mathbf{u}_1/Γ согласно (9) переходит (в размерном виде) в поле скоростей равномерно вращающегося с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$ сплошного твердого шара: $\mathbf{v}^* = \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*$, а \mathbf{u}_2 переходит в $\mathbf{u}_2^* = (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*)/(a/r^*)^3$.

3. Остановимся подробнее на рассмотрении поля скоростей, которое определяется формулами (9) при $R \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow \infty$, когда коэффициенты A_1' , A_2' , D' даются выражениями (10).

На рис. 1 приведены графики зависимости действительной части $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$ от r , т.е. $\text{Re}(u_{\phi 1})$ от r (при $0 < r < 1$) и $\text{Re}(u_{\phi 2})$ от r (при $r > 1$) для пористости $\Gamma = 0,8$. Здесь и далее все графики построены при $\theta = \pi/2$ (экватор пористого шара) для момента времени $t = 0$ (вследствие нестационарности движения жидкости поле скоростей изменяется со временем). Видно, что при фиксированном $a/\delta_1 = 0,4$ при увеличении a/δ_2 модуль скорости $\text{Re}(u_{\phi 1})$ и $\text{Re}(u_{\phi 2})$ уменьшается при каждом заданном значении r .

На рис. 2 приведены соответствующие графики при $a/\delta_1 = 1$. Видно, что модули скоростей в этом случае превышают соответствующие значения, приведенные на рис. 1.

При фиксированном значении $a/\delta_2 = 0,4$ скорость увеличивается с увеличением a/δ_1 (рис. 3).

На рис. 4 приведены графики скоростей при пористости $\Gamma = 0,95$. Сравнение с рис. 3 показывает, что увеличение пористости приводит к увеличению скорости при каждом заданном значении r .

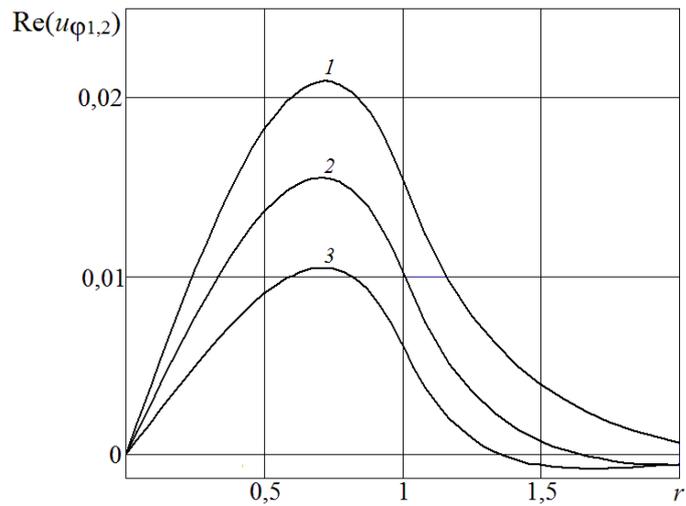


Рис. 1. Зависимость $\text{Re}(u_{\phi_{1,2}})$ от r : $a/\delta_1 = 0,4$; $a/\delta_2 = 1; 1,5; 2$ (кривые 1–3); $\Gamma = 0,8$

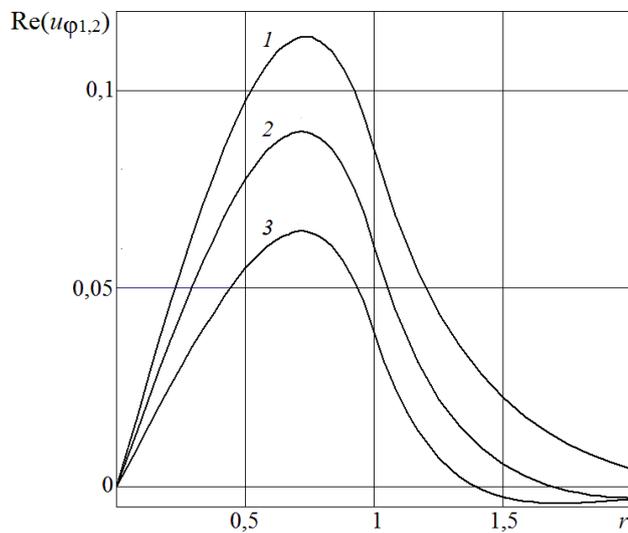


Рис. 2. Зависимость $\text{Re}(u_{\phi_{1,2}})$ от r : $a/\delta_1 = 1$; $a/\delta_2 = 1; 1,5; 2$ (кривые 1–3); $\Gamma = 0,8$

На рис. 5 приведен график скорости внутри и вне пористого шара при пористости $\Gamma = 0,95$. Внутри шара скорость обращается в нуль при двух значениях: $r \neq 0$, $r = 0$. Вне шара скорость обращается в нуль при трех значениях r , а также при $r \rightarrow \infty$. В промежутках между нулевыми значениями скорости направлены в противоположные стороны. Внутри шара имеются три слоя жидкости, движущихся при $t = 0$ с попарно противоположными скоростями. Аналогично обстоит дело и вне шара. При $a/\delta_1 = 0,9$ и тех же значениях других параметров, что и на рис. 5 происходит уменьшение скорости при каждом заданном r внутри и вне шара.

Заключение

Исследовано движение вязкой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением пористого шара, погруженного в нее. Жидкость

с шаром заключена в непроницаемую сферическую оболочку. Определены поля скоростей внутри и вне шара. Показано существование внутренних поперечных волн в жидкости внутри и вне шара. В таких волнах жидкость состоит из нескольких контактирующих слоев, в которых скорость направлена в попарно противоположные стороны перпендикулярно к направлению волны. Скорость жидкости во всех случаях обращается в нуль на оси вращения шара.

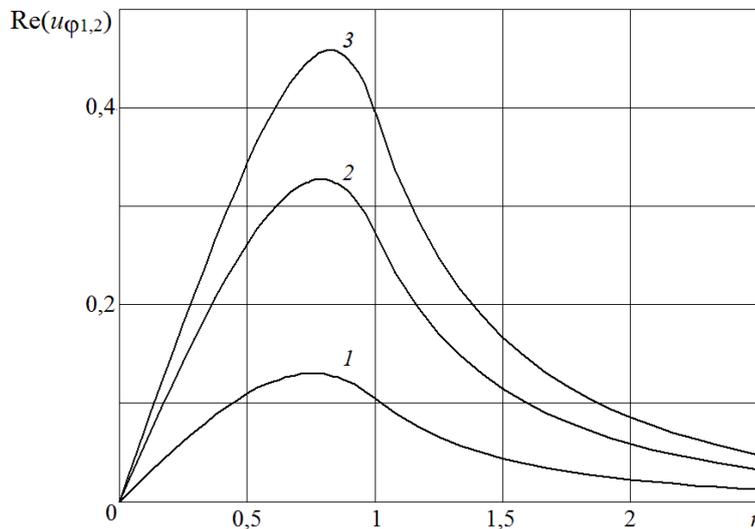


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$ от r : $a/\delta_1 = 1; 2; 3$ (кривые 1–3); $a/\delta_2 = 0,4$; $\Gamma = 0,8$

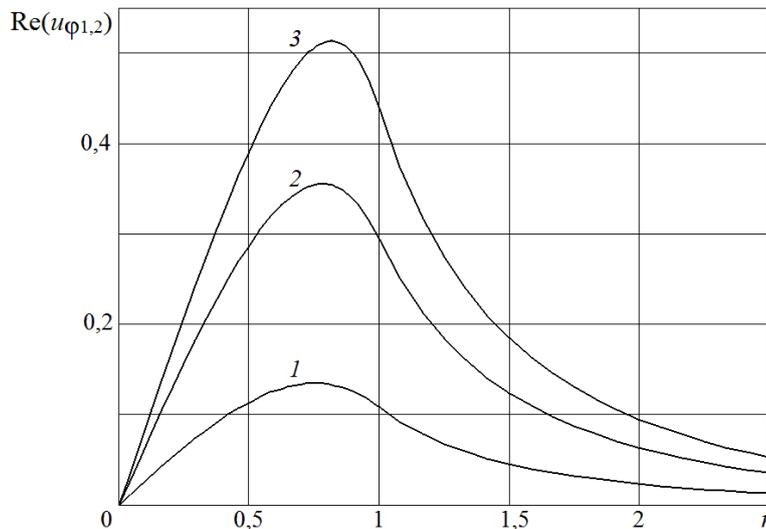


Рис. 4. Зависимость $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$ от r : $a/\delta_1 = 1; 2; 3$ (кривые 1–3); $a/\delta_2 = 0,4$; $\Gamma = 0,95$

Поля скоростей жидкости внутри и вне шара при различных значениях параметров показаны на графиках. Приведен анализ этих графиков.

Показано, что при определенных упрощающих предположениях из полученных в настоящей работе результатов следуют результаты, полученные

ранее другими авторами для твердого непроницаемого шара, совершающего вращательное колебательное движение в жидкости.

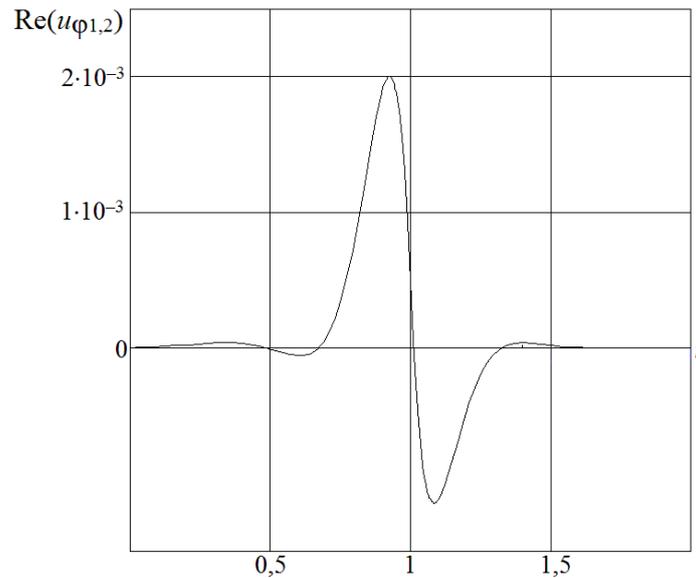


Рис. 5. Зависимость $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$ от r : $a/\delta_1 = 1$; $a/\delta_2 = 10$; $\Gamma = 0,95$

Список литературы

1. **Столяров, И. В.** Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании / И. В. Столяров, Н. Г. Тактаров // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987. – № 5. – С. 183–186.
2. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2006. – 736 с.
3. **Джозеф, Д.** Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф. – М. : Мир, 1981. – 640 с.
4. **Brinkman, H. C.** A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles / H. C. Brinkman. Appl. Sci. Res. – 1947. – Vol. 1, № 1. – P. 27 – 34.
5. **Nield, D. A.** Spin-up in a saturated porous medium / D. A. Nield // Transport in Porous Media. – 1989. – № 4. – P. 495–497.
6. **Tilton, N.** Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls / N. Tilton, L. Cortelezzi // J. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 604. – P. 411–445.
7. **Ochoa-Tapia, J. A.** Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development / J. A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 14. – P. 2635–2646.
8. **Ochoa-Tapia, J. A.** Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – II. Comparison with experiment / J. A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 14. – P. 2647–2655.

References

1. Stolyarov I. V., Taktarov N. G. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas]. 1987, no. 5, pp. 183–186.

2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Gidrodinamika* [Hydromechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 736 p.
3. Dzhozef D. *Ustoychivost' dvizheniy zhidkosti* [Fluid movement stability]. Moscow: Mir, 1981, 640 p.
4. Brinkman H. C. *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*. Appl. Sci. Res. 1947, vol. 1, no. 1, pp. 27 – 34.
5. Nield D. A. *Transport in Porous Media*. 1989, no. 4, pp. 495–497.
6. Tilton N., Cortelezzi L. *J. Fluid Mech.* 2008, vol. 604, pp. 411–445.
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1995, vol. 38, no. 14, pp. 2635–2646.
8. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1995, vol. 38, no. 14, pp. 2647–2655.

Тактаров Николай Григорьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра математики
и методики обучения математике,
Мордовский государственный
педагогический институт имени
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: colonnt@mail.ru

Taktarov Nikolay Grigor'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematics and methods of mathematics
teaching, Mordovia State Pedagogical
Institute named after M. E. Evseyev
(11a Studencheskaya street,
Saransk, Russia)

Кормилицин Анатолий Андреевич

аспирант, Мордовский государственный
педагогический институт имени
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: aa.korm@yandex.ru

Kormilitsin Anatoliy Andreevich

Postgraduate student, Mordovia State
Pedagogical Institute named
after M. E. Evseyev (11a Studencheskaya
street, Saransk, Russia)

Лемясева Надежда Александровна

аспирант, Мордовский государственный
педагогический институт имени
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: nadegdalem@mail.ru

Lemyaseva Nadezhda Aleksandrovna

Postgraduate student, Mordovia State
Pedagogical Institute named
after M. E. Evseyev (11a Studencheskaya
street, Saransk, Russia)

УДК 532.685

Тактаров, Н. Г.

Поперечные волны в вязкой жидкости, вызванные вращательным колебательным движением пористого шара / Н. Г. Тактаров, А. А. Кормилицин, Н. А. Лемясева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 3–13. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-1

**РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ
МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ И ВЫХОДУ РАЗНОГО ПОРЯДКА
ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ
АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ ВО ВХОДНЫХ
И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ**

Аннотация.

Актуальность и цели. Использование методов идентификации параметров (как линейных объектов, так и нелинейных) очень распространено в различных областях науки и техники, их применение позволило повысить работоспособность существующих автоматических систем управления, однако не все методы позволяют определять параметры указанных моделей с надлежащими свойствами (состоятельность и др.). Одной из часто применяемых моделей является многомерная по входу и выходу разного порядка дискретная линейная динамическая модель (прогнозирование удельного расхода топлива, электромагнитных параметров двигателей и др.). Целью исследования является разработка нового математического метода оценивания параметров многомерной по входу и выходу разного порядка дискретной линейной динамической системы в условиях априорной неопределенности (отсутствие знания о законе распределения помех наблюдения) на основе метода стохастической аппроксимации, а также создание и тестирование программного обеспечения, реализующего указанный алгоритм.

Материалы и методы. Предложен рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерной по входу и выходу разного порядка дискретной линейной динамической системы с нестационарными автокоррелированными помехами наблюдений во входных и выходных сигналах при отсутствии знания о законах распределения.

Результаты и выводы. Результатом работы является разработанный рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерной по входу и выходу разного порядка линейной динамической системы при наличии нестационарных автокоррелированных помех наблюдений во входных и выходных сигналах, доказана сильная состоятельность полученных оценок, а также разработано на основе полученного алгоритма программное обеспечение, реализация которого позволит повысить эффективность систем управления технологическими процессами в различных технических областях.

Ключевые слова: рекуррентный алгоритм, линейная динамическая система, многомерная система, разный порядок, стохастическая аппроксимация, автокорреляция, априорная неопределенность.

I. L. Sandler

**RECURRENT ESTIMATION OF PARAMETERS
BEING MULTIDIMENSIONAL IN TERMS OF INPUT AND OUTPUT
OF VARIOUS ORDERS OF LINEAR DYNAMIC
SYSTEMS IN THE PRESENCE OF AUTOCORRELATED
NOISES IN INPUT AND OUTPUT SIGNALS**

Abstract.

Background. The use of methods to identify parameters of both linear and non-linear objects is very widespread in various areas of science and technology. Such methods enable to increase operability of the existing automatic control systems, however not all methods allow to determine parameters of the specified models with appropriate properties (solvency and others). One of frequently applied models is a discrete linear dynamic model, multidimensional in terms of input and output of various orderz (forecasting of specific fuel consumption, electromagnetic parameters of engines and others). The purpose of the work is to develop a new mathematical method of estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of a discrete linear dynamic system in conditions of aprioristic uncertainty (absence of knowledge of the law of distribution of supervision hindrances) on the basis of the method of stochastic approximation, and also to create and test the software realizing the specified algorithm.

Materials and methods. The article offers a recurrent estimation algorithm for parameters that are multidimensional in terms of input and output of various orders of a discrete linear dynamic system with the non-stationary autocorrelated noises of supervision in input and output signals in the absence of knowledge of laws of distribution.

Results and conclusions. The work resulted in the development of the recurrent algorithm of estimation of parameters that are multidimensional in terms of input and output of various orders of a linear dynamic system in the presence of non-stationary autocorrelated interferences of supervision in input and output signals. The author proved strong solvency of the received estimates, as well as developed the software which will allow to increase efficiency of control systems of technological processes in various technical areas on the basis of the received algorithm.

Key words: recurrent algorithm, linear dynamic system, multidimensional system, different order, stochastic approximation, autocorrelation, aprioristic uncertainty.

Введение

При решении задач параметрической идентификации стохастических линейных динамических систем (ЛДС) во многих случаях помехи наблюдения присутствуют не только в выходных сигналах, но и во входных, их наличие делает неприменимыми обычные методы регрессионного анализа. В работах [1, 2] рассмотрены частные случаи модели многомерной ЛДС, имеющей разный порядок модели при наличии зашумленного выходного сигнала, а также авторегрессионная модель ЛДС, после чего производится обобщение алгоритма на случай помех во входных и выходных сигналах [3]. Рекуррентные алгоритмы [1–3] разработаны на случай стационарных белозумных помех наблюдений. В данной статье рассматривается разработка рекуррентного алгоритма, который позволяет определить неизвестный параметр многомерной ЛДС, имеющей разный порядок модели на случай нестационарных авторегрессионных помех наблюдений, действующих как на входные сигналы, так и на выходные.

Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую многомерную ЛДС, имеющую разный порядок модели с дискретным временем ($i = \dots -1, 0, 1, \dots$) и помехами наблюдений

во входных и выходных сигналах, которая описывается следующим разностным уравнением:

$$z_i^{(n)} - \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nm}} b_0^{(mn)}(n) z_{i-m}^{(n)} = \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq n}}^k \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)}(n) z_{i-m}^{(l)} + \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r_{nj}} a_0^{(mj)}(n) x_{i-m}^{(j)}, \quad (1)$$

$$y_i^{(l)} = z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i), \quad w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi_2^{(j)}(i), \quad n = \overline{1, k},$$

где $y_i^{(l)}$, $z_i^{(l)}$ – наблюдаемые и ненаблюдаемые последовательности выходных сигналов многомерной ЛДС, $l = \overline{1, k}$; k – число выходов (переменных) многомерной ЛДС; $b_0^{(ml)}(n)$, $a_0^{(mj)}(n)$ – искомые параметры многомерной динамической системы; $w_i^{(j)}$, $x_i^{(j)}$ – наблюдаемые и ненаблюдаемые последовательности входных сигналов многомерной ЛДС, $j = \overline{1, d}$; d – число входов (переменных) многомерной ЛДС; $\xi_1^{(l)}(i)$ – случайные последовательности (помеха) в l -м выходном сигнале многомерной ЛДС; $\xi_2^{(j)}(i)$ – случайные последовательности (помеха) в j -м входном сигнале многомерной ЛДС.

Для упрощения обозначим вектор следующим образом:

$$\Xi_{\bar{r}_{nk}, r_{nd}} = \left(\xi_1^{(n)}(i) : \Xi_{\bar{r}_{nm}}^T(i-1) : \Xi_{r_{n1}}^T(i-1) : \dots \right. \\ \left. \dots : \Xi_{\bar{r}_{nk}}^T(i-1), \Xi_{r_{n1}}^T : \dots : \Xi_{r_{nd}}^T \right)^T \in R_{\sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl} + \sum_{j=1}^d r_{nj} + d + 1}.$$

Пусть матрица

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \Xi_{\bar{r}_{nk}, r_{nd}} \Xi_{\bar{r}_{nk}, r_{nd}}^T \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \left(\begin{array}{c|c} \left(\sigma_1^{(n)} \right)^2 & \left(h_{\xi_{1,2}}^{(n)} \right) \\ \hline h_{\xi_{1,2}}^{(n)T} & H_{\xi_{1,2}}^{(n)} \end{array} \right),$$

где элементы побочной диагонали состоят из матриц $h_{\xi_{1,2}}^{(n)} = \left| h_{\xi_1}^{(n)} \mid 0 \right|$, причем

порядок матрицы $h_{\xi_1}^{(n)} : 1 \times \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl}$, $0 : 1 \times \sum_{j=1}^d r_{nj} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^k \bar{r}_{nl} + d$; и второй элемент

главной диагонали состоит из матрицы

$$H_{\xi_{1,2}}^{(n)} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{H}_{\xi_1}^{(n)} & 0 \\ \hline 0 & \bar{H}_{\xi_2}^{(n)} \end{array} \right),$$

коэффициенты которой расписываются следующим образом:

$$\bar{H}_{\xi_1}^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{\xi_1}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & H_{\xi_1}^{(1)} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & \dots & H_{\xi_1}^{(k)} \end{pmatrix}, \bar{H}_{\xi_2}^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{\xi_2}^{(1)} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & H_{\xi_2}^{(d)} \end{pmatrix},$$

причем

$$H_{\xi_1}^{(l)} = \begin{pmatrix} h_{\xi_1}^{(l)}(0) & \dots & h_{\xi_1}^{(l)}(r_l - 1) \\ \vdots & & \vdots \\ \hline h_{\xi_1}^{(l)}(r_l - 1) & \dots & h_{\xi_1}^{(l)}(0) \end{pmatrix}, H_{\xi_2}^{(j)} = \begin{pmatrix} h_{\xi_2}^{(j)}(0) & \dots & h_{\xi_2}^{(j)}(r_j) \\ \vdots & & \vdots \\ \hline h_{\xi_2}^{(j)}(r_j) & \dots & h_{\xi_2}^{(j)}(0) \end{pmatrix},$$

имеющие порядок

$$H_{\xi_1}^{(n)} : \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl} \times \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl}, H_{\xi_2}^{(n)} : \sum_{j=1}^d (r_{nj} + d) \times \sum_{j=1}^d (r_{nj} + d), 0 : \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl} \times \sum_{j=1}^d (r_{nj} + d).$$

Допустим, что для многомерной линейно разностной модели (1) выполняются следующие условия:

1⁰. Множество \tilde{B} , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной динамической системы, является компактом.

2⁰. Последовательности помех во входных и выходных сигналах ЛДС $\{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\}$ статистически независимые друг от друга и стационарные в совокупности в узком смысле с

$$E(\xi_1^{(l)}(i+1) / F_1^{(l)}) = 0, E(\xi_2^{(j)}(i+1) / F_2^{(j)}) = 0,$$

$$E\left[\frac{\{\xi_1^{(l)}(i+1)\}^2}{F_1^{(l)}}\right] \leq W_1^{(l)}(i), E\left[\frac{\{\xi_2^{(j)}(i+1)\}^2}{F_2^{(j)}}\right] \leq W_2^{(j)}(i),$$

где $F_1^{(l)}, F_2^{(j)}$ – σ -алгебры, индуцированные семействами случайных величин $\{\xi_1^{(l)}(i_0), \dots, \xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i_0), \dots, \xi_2^{(j)}(i)\}$; $W_1^{(l)}(i), W_2^{(j)}(i)$ – случайные величины $E(W_1^{(l)}(i)) \leq \pi_{\xi_1^{(l)}}, E(W_2^{(j)}(i)) \leq \pi_{\xi_2^{(j)}}$ с $l = \overline{1, k}, j = \overline{1, d}$, где E – оператор математического ожидания.

3⁰. Допустим выполнение следующего условия:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_1^{(l)}(i) \xi_1^{(l)}(i+m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_{\xi_1}^{(l)}(m) < \infty \text{ п.н.,}$$

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_2^{(j)}(i) \xi_2^{(j)}(i+m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_{\xi_2}^{(j)}(m) < \infty \text{ п.н.}$$

4⁰. Входные последовательности $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\}$ статистически не зависят от последовательности помех наблюдений $\{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\}$.

5⁰. Входные последовательности $\{x_i^{(j)}\}$ стационарные в совокупности в узком смысле с дробно-рациональной плотностью – случайные величины с $E\left\{\left(x_i^{(j)}\right)^2\right\} > 0$ и для некоторого $\pi_x^{(j)} > 0: |x_i^{(j)}| < \pi_x^{(j)}$ п.н.

6⁰. Допустим, что выполняется условие несократимости полиномов:

$$B^{(n)}(q^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nn}} b_0^{(mn)} \cdot q^{-m}, \quad A^{(j)}(q^{-1}) = \sum_{m=0}^{\bar{r}_{nj}} a_0^{(mj)} \cdot q^{-m},$$

$$B^{(l)}(q^{-1}) = \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)} \cdot q^{-m},$$

где q^{-1} – оператор сдвига назад, $q^{-1}x_i = x_{i-1}$.

Требуется по наблюдаемым входным и выходным последовательностям $\{y_i^{(l)}\}, \{w_i^{(j)}\}$ рекуррентно определить оценки неизвестных параметров многомерной ЛДС разного порядка, описываемой разностным уравнением (1).

Рекуррентный алгоритм идентификации параметров многомерной ЛДС разного порядка

Используя полученные результаты [3], неизвестные параметры многомерной ЛДС можно определить, применив следующий критерий, при котором получаемые оценки будут сильно состоятельные:

$$\min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)}\right) \in \bar{B}} \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} E \left[\left(y_i^{(n)} - \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^T \left(\frac{Y_{r_{nk}}(i-1)}{W_{r_{nd}}(i)} \right) \right)^2 \right]}{1 + b(n) \frac{\bar{H}_{\xi_1}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2} (n) b(n)^T + a(n) \frac{\bar{H}_{\xi_2}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2} (n) a(n)^T - 2 \frac{h_{\xi_1}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2} b(n)}, \quad (2)$$

где

$$b(n) = \left(\left(b^{(n)}(n) \right)^T \dots \left(b^{(k)}(n) \right)^T \right)^T, \quad a(n) = \left(\left(a^{(1)}(n) \right)^T \dots \left(a^{(d)}(n) \right)^T \right)^T,$$

$$b^{(l)}(n) = \left(b^{(1l)}(n), \dots, b^{(\bar{r}_{nl})}(n) \right)^T, \quad a^{(j)}(n) = \left(a^{(0j)}(n), \dots, a^{(r_{nj})}(n) \right)^T,$$

$$Y_{\bar{r}_{nk}}(i-1) = \left(y_{\bar{r}_{nk}}^{(n)T} : \dots : y_{\bar{r}_{nk}}^{(k)T} \right)^T, \quad W_{r_{nd}}(i) = \left(w_{r_{n1}}^{(1)T} : \dots : w_{r_{nd}}^{(d)T} \right)^T,$$

$$y_{\bar{r}_{nl}}^{(l)}(i) = \left(y_{i-1}^{(l)}, \dots, y_{i-\bar{r}_{nl}}^{(l)} \right)^T, \quad w_{r_{nj}}^{(j)}(i) = \left(w_i^{(j)}, \dots, w_{i-r_{nj}}^{(j)} \right)^T.$$

Таким образом, оценки неизвестного вектора параметров $\begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix}$

многомерной ЛДС разного порядка можно получить с помощью стохастически градиентного алгоритма минимизации функционала (2), который будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{i+1}(n) \\ \hat{a}_{i+1}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix} - \alpha_i \nabla \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \left[\frac{\left(\left| y_{i+1}^{(n)} - \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right| \frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i+1)}{W_{r_{nd}}(i+1)} \right)^2}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))} \right], \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n)) &= 1 + b(n) \frac{\bar{H}_{\xi_1}^{(n)}}{(\sigma_1^{(n)})^2} (n) b(n)^T + \\ &+ a(n) \frac{\bar{H}_{\xi_2}^{(n)}}{(\sigma_1^{(n)})^2} (n) a(n)^T - 2 \frac{h_{\xi_1}^{(n)}}{(\sigma_1^{(n)})^2} b(n), \end{aligned}$$

α_i – последовательность, для которой должны выполняться следующие условия:

$$7^0. \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty, \quad \alpha_i \geq \alpha_{i+1}, \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^t < \infty \quad \text{при} \quad t > 1.$$

$$8^0. \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_1^{(l)}(i) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_2^{(j)}(i) < \infty, \quad \text{п.н.}$$

Теорема. Пусть многомерная ЛДС разного порядка описывается разностным уравнением (1) и выполняются условия 1⁰–8⁰, тогда оценки, определяемые стохастически градиентным алгоритмом (3) с вероятностью 1 при

$i \rightarrow \infty$ либо сходятся в единственной точке $\left. \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right|$, либо расходятся $\left. \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \infty$.

Доказательство теоремы. Доказательство состоятельности получаемых с помощью стохастически градиентного алгоритма (3) оценок базируется на методе непрерывных моделей [2].

Построим асимптотическую непрерывную детерминируемую модель алгоритма (3). Тогда функционал (2) представим в виде

$$J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} E \left(y_i^{(n)} - \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^T \left(\frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i-1)}{W_{\bar{r}_{nd}}(i)} \right) \right)^2}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))} =$$

$$= \left(\sigma_1^{(n)} \right)^2 + \frac{\left(\left| \frac{b(n)}{a(n)} \right| - \left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right| \right)^T H^* \left(\left| \frac{b(n)}{a(n)} \right| - \left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right| \right)}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))}$$

$$\text{при } \left| \frac{b(n)}{a(n)} \right| \in R_{\bar{r}_{nn} + \bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk} + r_{n1} + \dots + r_{nd} + d}$$

где матрица H^* имеет вид

$$H^* = \lim_{i \rightarrow \infty} E \left| \begin{array}{c|c} \frac{z^{(n)}}{\bar{r}_{nn}} & \frac{z^{(n)}}{\bar{r}_{nn}} \\ \frac{z^{(1)}}{\bar{r}_{n1}} & \frac{z^{(1)}}{\bar{r}_{n1}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{z^{(k)}}{\bar{r}_{nk}} & \frac{z^{(k)}}{\bar{r}_{nk}} \\ \frac{x^{(1)}}{r_{n1}} & \frac{x^{(1)}}{r_{n1}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x^{(d)}}{r_{nd}} & \frac{x^{(d)}}{r_{nd}} \end{array} \right|^T > 0, \quad H^* = \left(\begin{array}{c|c} H_{zz}^* & H_{zx}^* \\ \hline (H_{zx}^*)^T & H_{xx}^* \end{array} \right) > 0$$

где

$$Z_{\bar{r}_{nl}}^{(l)}(i) = \left| z_{i-1}^{(l)}, \dots, z_{i-\bar{r}_{nl}}^{(l)} \right|^T - \text{вектор-строка размерностью } \bar{r}_{nl} \times 1,$$

$$X_{r_{nj}}^{(j)}(i) = \left| x_i^{(j)}, \dots, x_{i-r_{nj}}^{(j)} \right|^T - \text{вектор-строка размерностью } (r_{nj} + 1) \times 1,$$

порядка

$$\left(\bar{r}_{nm} + \bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk} + r_{n1} + \dots + r_{nd} + d \right) \times \left(\bar{r}_{nm} + \bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk} + r_{n1} + \dots + r_{nd} + d \right),$$

что следует из условий $1^0, 4^0, 6^0$.

В данном случае асимптотическая непрерывная детерминированная модель стохастически градиентного алгоритма имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{b(n)} \\ a(n) \end{pmatrix} = -\nabla \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) J \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Допустим, что функция Ляпунова будет иметь следующий вид:

$$V \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{V} \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} &= \nabla^T \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} = \\ &= - \left\| \nabla \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} \right\|^2, \quad \nabla^T \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} < 0, \quad (5) \end{aligned}$$

то множество

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} \in R_{(\bar{r}_{nm} + \dots + d)} : \dot{V} \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

состоит из стационарных точек функционала $J \begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix}$ [2].

Чтобы перейти к непрерывной модели от алгоритма (3), необходимо показать, что для случайных последовательностей $\{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\}$ и $\{\alpha_i\}$ выполняется равенство [4]:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{i=t}^{m(t,T)} \alpha_i e_i \left(\begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix}, \{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\} \right) \right\| = 0, \quad (6)$$

где для $T > 0$, $m(t, T) = \max \left\{ m : \sum_{i=t}^m \alpha_i \leq T \right\}$ $\|\bullet\|$ – евклидова норма;

$$e_i \left(\begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix}, \{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\} \right) = \xi_1^{(n)}(i) - \Xi_{r_{nn}}^T b^{(n)}(n) - \Xi_{r_{n1}}^T b^{(1)}(n) - \dots \\ \dots - \Xi_{r_{nk}}^T b^{(k)}(n) - \Xi_{r_{n1}}^T a^{(1)}(n) - \dots - \Xi_{r_{nd}}^T a^{(d)}(n).$$

Чтобы выполнилось равенство (6), необходима ограниченность последовательности $\left\{ \begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix} \right\}$, что соответственно предполагает ограниченность

возрастания функции $\nabla \left(\frac{b}{a} \right) J \left(\frac{b}{a} \right)$ при $\left\| \frac{b}{a} \right\| \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim_{\left\| \frac{b}{a} \right\| \rightarrow \infty} \nabla \left(\frac{b}{a} \right) J \left(\frac{b}{a} \right) = 0.$$

Из ограниченности алгебраических сумм в условии 8^0 и последовательности оценок параметров $\left\{ \begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix} \right\}$ следует ограниченность суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \left(\begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix}, \{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\} \right) < \infty,$$

откуда следует выполнение равенства (6).

В работе [5, с. 12, 292] приведены теоремы, из которых следует, что при выполнении условий $1^0 - 8^0$ и (5) (6) последовательность оценок параметров $\left\{ \begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix} \right\}$ ограничена и при $i \rightarrow \infty$, тогда последовательность оценок

параметров $\left\{ \begin{pmatrix} \hat{b}(i) \\ \hat{a}(i) \end{pmatrix} \right\}$ стремится к точкам множества \tilde{B} .

Исследуя асимптотическую непрерывную детерминированную модель (4), покажем, что множество B_* состоит из одной единственной точки

$$\left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right):$$

$$B_* = \left\{ \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in R_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d)} : \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = \left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right) \right\}.$$

Дальнейший ход доказательства функции (7) теоремы аналогичен доказательству теоремы, приведенному в [3]:

$$J'(u) = \frac{u^T H_1^* u}{u^T H'_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)} u}, \quad (7)$$

где

$$u = \left| u_1, \dots, u_{\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1} \right|^T \in R_{\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1},$$

$$H_1^* = \lim_{i \rightarrow \infty} E \left[\begin{array}{c} \left| \frac{-y_i^{(n)}}{Y_{\bar{r}_{nk}}(i)} \right| \\ \left| \frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i)}{W_{r_{nd}}(i)} \right| \end{array} \left| \begin{array}{c} -y_i^{(n)} \\ Y_{\bar{r}_{nk}}^T(i) \\ W_{r_{nd}}^T(i) \end{array} \right| \right],$$

$$H'_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{\left(h_{\xi_{1,2}}^{(n)} \right)^T}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} \\ \hline \frac{h_{\xi_{1,2}}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} & \frac{H_{\xi_{1,2}}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} \end{array} \right).$$

Результаты моделирования рекуррентного алгоритма идентификации параметров многомерной ЛДС разного порядка

На основе разработанного алгоритма (3) с использованием предыдущих программных продуктов для рекуррентного оценивания со стационарными белозумными помехами [5, 6] разработан программный продукт на случай нестационарных автокоррелированных помех [7], который создан посредством пакета моделирования MatLab 7.0.

Для подтверждения эффективности оценивания разработанного стохастически градиентного алгоритма (3) реализован рекуррентный МНК. В модельном примере многомерная ЛДС разного порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
 z_i^{(1)} &= 1,2z_{i-1}^{(1)} - 0,7z_{i-2}^{(1)} - 0,3z_{i-1}^{(2)} + 1,2z_{i-2}^{(2)} + x_i^{(1)} + \\
 &+ 0,6x_{i-1}^{(1)} - 0,3x_{i-2}^{(1)} - 0,4x_{i-3}^{(1)} + x_i^{(2)} + 0,4x_{i-1}^{(2)}, \\
 z_i^{(2)} &= 0,5z_{i-1}^{(1)} - 0,7z_{i-2}^{(1)} - 0,7z_{i-1}^{(2)} + x_i^{(1)} + 0,6x_{i-1}^{(1)} + 0,2x_{i-3}^{(1)} + x_i^{(2)} + 0,4x_{i-1}^{(2)}, \\
 y_i^{(l)} &= z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i), \\
 w_i^{(j)} &= x_i^{(j)} + \xi_2^{(j)}(i)
 \end{aligned}$$

На j -й вход многомерной ЛДС разного порядка подавался сигнал вида

$$x_i^{(j)} - 0,5x_{i-3}^{(j)} = \zeta_i^{(j)} - 0,5\zeta_{i-2}^{(j)} + 0,3\zeta_{i-3}^{(j)} + 0,2\zeta_{i-4}^{(j)},$$

где $\zeta_i^{(j)}$ – стационарный белый шум.

Помехи наблюдений во входных сигналах ЛДС описываются следующими уравнениями:

$$\xi_1^{(d)}(i) = -0,5 \cdot \xi_1(i-1) - 0,3 \cdot \xi_1(i-2) + e_i$$

с дисперсией вида

$$\sigma_1^2(i) = 0,02 + 0,7 \cdot \sigma_1^2(i-1) + 0,2 \cdot \xi_1^2(i-1).$$

Помехи в выходных сигналах многомерной ЛДС:

$$\xi_2^{(k)}(i) = -0,5 \cdot \xi_2(i-1) - 0,3 \cdot \xi_2(i-2) + e_i$$

с дисперсией вида

$$\sigma_2^2(i) = 0,08 + 0,7 \cdot \sigma_2^2(i-1) + 0,2 \cdot \xi_2^2(i-1).$$

Начальные значения параметров линейной динамической системы полагались равными нулю. Отношение полезного сигнала к помехе на выходе и выходе многомерной ЛДС составляло 0,5. На рис. 1, 2 представлены графики относительных погрешностей оценок параметров для первого и второго выходов линейной динамической системы, определяемые по соотношению

$$\delta\theta_i(n) = \sqrt{\left\| \left(\frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right) - \left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right) \right\|^2} / \left\| \left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right) \right\|^2 \cdot 100 \%.$$

Заключение

Анализируя полученные графические характеристики (рис. 1, 2), доказали, что предложенный алгоритм (3) моделирования многомерных по входу и выходу ЛДС разного порядка при наличии автокоррелированных помех наблюдений во входных и выходных сигналах эффективен и дает возмож-

ность получения наиболее точных оценок параметров системы в сравнении с классическим методом наименьших квадратов рекуррентной формы.

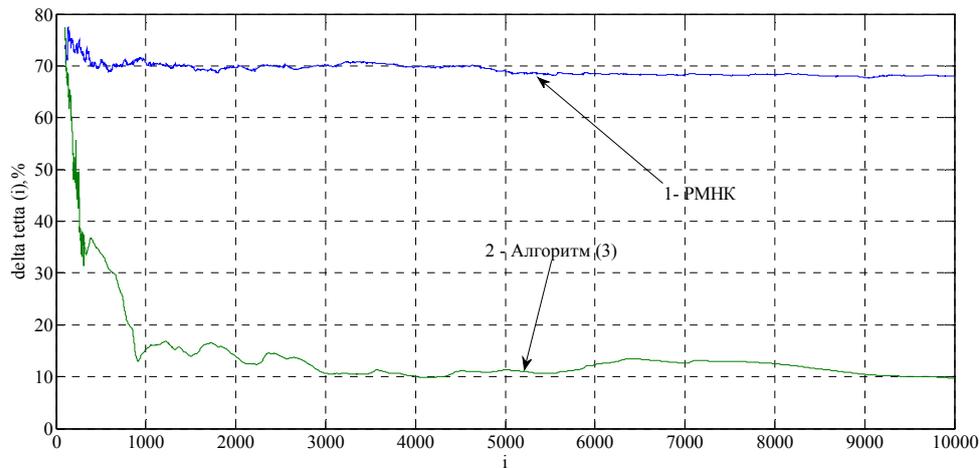


Рис. 1. Графики относительных погрешностей определения параметров для первого выхода линейной динамической системы: 1 – рекуррентный МНК; 2 – градиентный алгоритм (3) определения оценок параметров

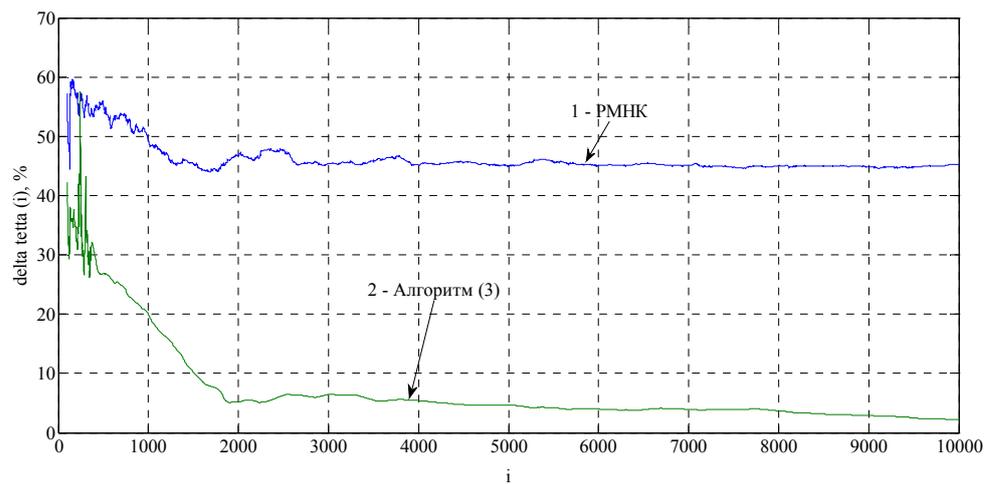


Рис. 2. Графики относительных погрешностей определения параметров для второго выхода линейной динамической системы: 1 – рекуррентный МНК; 2 – градиентный алгоритм (3) определения оценок параметров

Список литературы

1. Сандлер И. Л. Рекуррентное оценивание параметров авторегрессии многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехой в выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 1 (47). – С. 31–35.
2. Сандлер, И. Л. Рекуррентная идентификация параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами

- в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Вестник транспорта Поволжья. – 2012. – № 2 (32). – С. 68–74.
3. **Кацюба, О. А.** Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / О. А. Кацюба, И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 1 (47). – С. 31–34.
 4. **Chen, H. F.** *Stochastic Approximation and Its Applications* / H. F. Chen. – Dordrecht : Kluwer, 2002. – 357 p.
 5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012615960. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах / Сандлер И. Л. – 29.06.2012.
 6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013619621. Рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерных линейных динамических систем разного порядка со стационарными белыми шумами помехами / Сандлер И. Л. – 11.10.2013.
 7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013611203. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с автокоррелированными помехами во входных и выходных сигналах / Сандлер И. Л. – 09.01.2013.

References

1. Sandler I. L. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control systems and information technologies]. 2012, no. 1 (47), pp. 31–35.
2. Sandler I. L. *Vestnik transporta Povolzh'ya* [Bulletin of Volga region transport]. 2012, no. 2 (32), pp. 68–74.
3. Katsyuba O. A., Sandler I. L. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control systems and information technologies]. 2012, no. 1 (47), pp. 31–34.
4. Chen H. F. *Stochastic Approximation and Its Applications*. Dordrecht: Kluwer, 2002, 357 p.
5. Computer software state registration certificate № 2012615960. Recurrent estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of a linear dynamic system with noises in input and output signals. Sandler I. L. 29.06.2012.
6. Computer software state registration certificate № 2013619621. A recurrent estimation algorithm for parameters of multidimensional linear dynamic systems of various orders with stationary white noises. Sandler I. L. 11.10.2013.
7. Computer software state registration certificate № 203611203. Recurrent estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of a linear dynamic system with autocorrelated interferences in input and output signals. Sandler I. L. 09.01.2013.

Сандлер Илья Львович

аспирант, Самарский государственный университет путей сообщения (Россия, г. Самара, 1-й Безымянный переулок, 18)

E-mail: viruskvam@bk.ru

Sandler Il'ya L'vovich

Postgraduate student, Samara State Transport University (18 1-y Bezymyanniy lane, Samara, Russia)

УДК 519.254

Сандлер, И. Л.

Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем при наличии автокоррелированных помех во входных и выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 14–27. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-2

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Предложен аналитический метод исследования задачи дифракции монохроматических поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на диэлектрическом слое, диэлектрическая проницаемость которого нелинейно зависит от квадрата модуля электрического поля. Интерес к подобным задачам обусловлен прежде всего практическими приложениями нелинейных эффектов в микроэлектронике и фотонике.

Материалы и методы. Основным методом исследования является метод интегральных дисперсионных уравнений.

Результаты. В работе получены уравнения, связывающие амплитуду падающей волны с коэффициентами отражения и прохождения для нелинейности типа Керра. Проведено сравнение с решением соответствующей линейной задачи.

Выводы. В рассматриваемой задаче получение явных выражений для искоемых коэффициентов возможно лишь для нелинейностей третьего (нелинейность Керра) и пятого порядков. Но даже в этих случаях явные решения нелинейных дифференциальных уравнений достаточно сложны, чтобы использовать их для явного выражения указанных коэффициентов. В случае нелинейностей более высоких порядков явные решения найти не удастся. Однако предложенный в статье подход позволит получить уравнения, связывающие искоемые коэффициенты и в этих более сложных случаях.

Ключевые слова: задача дифракции, диэлектрический слой, нелинейность Керра, уравнение Максвелла.

D. V. Valovik, A. E. Demchenko

ON ONE APPROACH TO THE PROBLEM OF POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVES DIFFRACTION ON A DIELECTRIC LAYER FILLED WITH A NONLINEAR MEDIUM

Abstract.

Background. An analytical approach to the problem of diffraction of monochromatic polarized electromagnetic TE waves on a dielectric layer filled with a nonlinear medium is suggested. The nonlinear medium's permittivity depends on the electric field's squared module. Such kind of problems attracts attention due to the importance of nonlinear effects in microelectronics and photonics.

Materials and methods. The main theoretical tool to study the problem is the integral dispersion equation method.

¹ Работа поддержана Грантом Президента РФ (грант № МК-4684.2016.1).

Results. The approach used allows one to derive equations binding the amplitude of the incident field with the reflection and transmission coefficients for the Kerr medium. The article shows a comparison between the nonlinear problem and the corresponding linear problem.

Conclusions. Explicit formulas for the sought-for coefficients can be found only in the cases of cubic (Kerr nonlinearity) and quintic nonlinearities. However, explicit solutions to the nonlinear differential equations are complicated for both cases. This makes it practically useless to use the explicit solutions for determination of the sought-for coefficients. The use of explicit solutions is impossible due to higher nonlinearities. However, the approach, suggested by the authors, works well for cubic, quintic as well as for much more complicated cases.

Key words: problem of diffraction, dielectric layer, Kerr nonlinearity, Maxwell's equation.

Введение

Задачи дифракции монохроматических поляризованных электромагнитных волн на плоских диэлектрических слоях, заполненных нелинейной средой (см. [1–4] и библиографию там), исследовались не так активно, как соответствующие задачи о распространении волн. При этом теория таких задач дифракции интересна и содержательна. Существенным препятствием здесь, как и в случае аналогичных задач о распространении волн, служит то, что явные решения нелинейной задачи дифракции (значения коэффициентов отражения и прохождения) можно искать лишь в самых простейших случаях [4]. В остальных случаях исследуемые нелинейные дифференциальные уравнения не удастся проинтегрировать в явном виде, а значит, нет возможности выразить искомые коэффициенты через явные решения уравнений (если же в отдельных случаях явные решения можно найти, то они являются весьма сложными функциями, и по этой причине эффективно работать с ними не удастся). Указанная сложность является одной из причин для поиска подходящего метода для решения рассматриваемого класса задач. Одним из таких методов служит метод, развитый в [5].

1. Постановка задачи

Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ расположен плоский слой

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \quad (h > 0).$$

Полупространства $x < 0$ и $x > h$ заполнены однородными и изотропными средами без потерь с постоянными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_1 \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_3 \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0$ соответственно, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Слой Σ заполнен однородной и изотропной средой без потерь с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от электрического поля. Диэлектрическая проницаемость ε в слое выражается законом Керра:

$$\varepsilon = \left(\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\alpha} |\mathbf{E}|^2 \right) \varepsilon_0, \quad (1)$$

где $\tilde{\varepsilon}_2$ – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости; $\tilde{\alpha} > 0$ – коэффициент нелинейности. Во всем пространстве $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Мы предполагаем, что выполняются неравенства $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Рассмотрим монохроматическую ТЕ-волну $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которая падает на слой Σ из полупространства $x > h$. Здесь ω – (известная) круговая частота,

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

а γ – известная вещественная постоянная, компоненты E_y , H_x , H_z зависят только от координаты x . Поля \mathbf{E} , \mathbf{H} называются комплексными амплитудами.

Как известно, волна частично отражается, а частично преломляется слоем. Падающая волна на границе $x = h$ характеризуется коэффициентом E_i , отраженная волна – коэффициентом E_r ; преломленная волна на границе $x = 0$ характеризуется коэффициентом E_t .

Задача дифракции заключается в том, чтобы по известному коэффициенту E_i найти коэффициенты E_t и E_r . При этом комплексные амплитуды (2) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \quad (3)$$

стандартным условиям сопряжения на границах раздела сред; отраженная волна удовлетворяет условию излучения на бесконечности.

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ уравнения (3) линейные, их решения для полей (2) легко находятся и имеют вид (при нахождении решения для $x < 0$ было использовано условие излучения):

$$E_y(x) = \begin{cases} E_t e^{k_1 x}, & x < 0, \\ E_i e^{k_3(x-h)} + E_r e^{-k_3(x-h)}, & x > h, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1 > 0, \quad k_3^2 := \gamma^2 - \varepsilon_3 > 0, \quad k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0, \\ \varepsilon_1 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_1, \quad \varepsilon_3 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_3.$$

Используя обозначение $E := E_y$, внутри слоя Σ из уравнений (3) получаем

$$E'' = -(k_2^2 + \tilde{\alpha} k_0^2 E^2)E, \quad (5)$$

где $k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2$ (k_2^2 не обязательно положительно); $\varepsilon_2 = k_0^2 \tilde{\varepsilon}_2$; $\alpha = k_0^2 \tilde{\alpha}$.

Используя решения (4) и условия сопряжения, получаем граничные условия для уравнения (5):

$$E'(0) - k_1 E(0) = 0, \quad E(h) = E_i + E_r, \quad E'(h) = k_3 (E_i - E_r), \quad (6)$$

где $E(0) = E_t$.

2. Линейный случай

Пусть $\gamma^2 < \varepsilon_2$, тогда из (5) внутри слоя при $\alpha = 0$ получаем

$$E(x) = C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x. \quad (7)$$

Вычисляя $E(x)$ в точке $x = 0$ и используя первое условие (6), получаем

$$C_2 = E_t, \quad C_1 = \frac{k_1}{k_2} E_t.$$

Теперь используя остальные условия (6) и решение (7), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (k_1 \sin k_2 h + k_2 \cos k_2 h) E_t - k_2 E_r = k_2 E_i, \\ (k_1 \cos k_2 h - k_2 \sin k_2 h) E_t + k_3 E_r = k_3 E_i. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, что значение γ должно быть выбрано так, чтобы определитель этой системы не обращался в нуль. Указанный определитель есть

$$\Delta = k_2(k_1 + k_3) \cos k_2 h - (k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h.$$

Замечание 1. Уравнение $\Delta = 0$ (относительно γ) есть ни что иное, как дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения собственных ТЕ-волн вида (2) волновода Σ [6, 7].

Решая систему (8), находим

$$E_t = \frac{2k_2 k_3}{k_2(k_1 + k_3) \cos k_2 h - (k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h} E_i, \quad (9)$$

$$E_r = \frac{-k_2(k_1 - k_3) \cos k_2 h + (k_2^2 + k_1 k_3) \sin k_2 h}{k_2(k_1 + k_3) \cos k_2 h - (k_2^2 - k_1 k_3) \sin k_2 h} E_i. \quad (10)$$

Используя первый интеграл уравнения (5) и краевые условия (6), получаем следующее соотношение:

$$k_3^2 (E_i - E_r)^2 + k_2^2 (E_i + E_r)^2 = (k_1^2 + k_2^2) E_t. \quad (11)$$

В случае $\gamma^2 > \varepsilon_2$, т.е. $k_2^2 < 0$, решение уравнения (5) в слое примет вид

$$E(x) = \tilde{A} \sin i\tilde{k}_2 x + B \cos i\tilde{k}_2 x = A \operatorname{sh} \tilde{k}_2 x + B \operatorname{ch} \tilde{k}_2 x, \quad (12)$$

где

$$\tilde{k}_2^2 := -k_2^2, \quad A = \frac{k_1}{\tilde{k}_2} E_t, \quad B = E_t.$$

Вычисляя $E(x)$ в точке $x = h$ и используя условия (6), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (k_1 \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h + \tilde{k}_2 \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h) E_t - \tilde{k}_2 E_r = \tilde{k}_2 E_i, \\ (k_1 \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + \tilde{k}_2 \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h) E_t + k_3 E_r = k_3 E_i. \end{cases} \quad (13)$$

Решая систему (12), получаем

$$E_t = \frac{2\tilde{k}_2 k_3}{\tilde{k}_2(k_1 + k_3) \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + (\tilde{k}_2^2 + k_1 k_3) \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h} E_i, \quad (14)$$

$$E_r = \frac{\tilde{k}_2(k_3 - k_1) \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + (k_1 k_3 - \tilde{k}_2^2) \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h}{\tilde{k}_2(k_1 + k_3) \operatorname{ch} \tilde{k}_2 h + (\tilde{k}_2^2 + k_1 k_3) \operatorname{sh} \tilde{k}_2 h} E_i. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае соотношение (11) изменится очевидным образом.

3. Нелинейный случай

Первый интеграл уравнения (5) имеет вид

$$(E'(x))^2 + k_2^2 E^2(x) + \frac{\alpha}{2} E^4(x) = C, \quad (16)$$

где C – постоянная интегрирования.

Используя (6) в точке $x = 0$, получаем

$$C = (k_2^2 - k_1^2) E_t^2 + \frac{1}{2} \alpha E_t^4 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_t^2 + \frac{1}{2} \alpha E_t^4, \quad (17)$$

здесь C не зависит от γ и $C > 0$, если $\alpha \geq 0$.

Используя (6) в точке $x = h$ и формулу (17), получаем из (16) соотношение, аналогичное (11), но для нелинейного случая:

$$\begin{aligned} \Psi(E_r, E_t) &\equiv k_3^2 (E_i - E_r)^2 + k_2^2 (E_i + E_r)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha (E_i + E_r)^4 - (k_2^2 - k_1^2) E_t^2 - \frac{1}{2} \alpha E_t^4 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем новые переменные:

$$\tau(x) = E^2(x), \quad \eta(x) = \frac{E'(x)}{E(x)}. \quad (19)$$

Уравнение (5) можно переписать как систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(k_2^2 + \alpha\tau + \eta^2). \end{cases} \quad (20)$$

Первый интеграл системы (20), который можно найти непосредственно из (20) или из (16), имеет вид

$$\alpha\tau^2 + 2(\eta^2 + k_2^2)\tau = 2C. \quad (21)$$

Решая (21) относительно τ , учитывая, что $\tau \geq 0$ и подставляя результат в правую часть второго уравнения (20), получаем

$$\eta' = -w, \quad (22)$$

где $w = \sqrt{(k_2^2 + \eta^2)^2 + 2\alpha C} > 0$. Используя (6), находим

$$\eta(0) = k_1, \quad \eta(h) = k_3 \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r}. \quad (23)$$

Из формулы (19) видно, что η непрерывна тогда и только тогда, когда $E(x)$ не обращается в 0. В общем случае $E(x)$ имеет нули $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$. Таким образом, $\eta(x)$ имеет n точек разрыва $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$. Если $n = 0$, то $E(x)$ не обращается в 0 ни в одной точке $x \in (0, h)$ и, значит, $\eta(x)$ непрерывна при $x \in (0, h)$. Ясно, что $E'(x_i) \neq 0$ для любых $i = \overline{1, n}$.

Используя формулы (19) и (22), получаем

$$\eta(x_i - 0) = -\infty, \quad \eta(x_i + 0) = +\infty, \quad i = \overline{1, n}. \quad (24)$$

Решение уравнения (22) будем искать на интервалах $[0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, h]$:

$$\begin{aligned} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w} &= x + c_0, \quad 0 \leq x < x_1, \\ -\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x + c_i, \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ -\int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x + c_n, \quad x_n < x \leq h, \end{aligned} \quad (25)$$

где $i = \overline{1, n-1}$. Подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1} - 0$, $x = h$ в (25) (в первую, вторую и третью формулы соответственно), найдем постоянные c_0, c_1, \dots, c_n :

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w}, \\ c_i &= -\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} \frac{d\eta}{w} - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ c_n &= -\int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} \frac{d\eta}{w} - h. \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая (26), перепишем (25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w} &= x + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w}, \quad 0 \leq x < x_1, \\ -\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} \frac{d\eta}{w} - x_{i+1}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ -\int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{w} &= x - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} \frac{d\eta}{w} - h, \quad x_n < x < h, \end{aligned} \quad (27)$$

где $i = \overline{1, n-1}$. Подставляя $x = x_1 - 0$, $x = x_i + 0$, $x = x_n + 0$ в (27) (в первую, вторую и третью формулы соответственно), получим

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} \frac{d\eta}{w}, \\ 0 &= x_i - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} \frac{d\eta}{w} - x_{i+1}, i = \overline{1, n-1}, \\ 0 &= x_n - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} \frac{d\eta}{w} - h. \end{aligned} \quad (28)$$

Принимая во внимание (23) и используя (24), получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_{-\infty}^{k_1} \frac{d\eta}{w}, \\ x_{i+1} - x_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{w}, i = \overline{1, n-1}, \\ h - x_n &= \int_{k_3}^{+\infty} \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r} \frac{d\eta}{w}. \end{aligned} \quad (29)$$

Просуммировав (29), получим

$$x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1} + h - x_n = \Phi(E_r, E_t; n), \quad (30)$$

где

$$\Phi(E_r, E_t; n) \equiv \int_{-\infty}^{k_1} \frac{d\eta}{w} + (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{w} + \int_{k_3}^{+\infty} \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r} \frac{d\eta}{w}.$$

Из формулы (30) получаем уравнение

$$\Phi(E_r, E_t; n) = h, \quad (31)$$

где $n = 0, 1, \dots$

Из проведенных выше рассуждений получаем следующее

Утверждение 1. Пусть $\alpha > 0$, $h > 0$ и E_i известны. Если пара чисел E_r , E_t является решением задачи (5)–(6), тогда числа E_r и E_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Psi(E_r, E_t) = 0, \\ \Phi(E_r, E_t; n) = h \end{cases} \quad (32)$$

для некоторого целого $n \geq 0$.

Можно показать, что всякое решение (E_r, E_t) системы (32) является решением задачи (5)–(6) и, таким образом, доказать теорему об эквивалентности.

Положив в (31) $\alpha = 0$, проинтегрировав и взяв \tan , после несложных преобразований получим формулу (10). Обоснованием такого подхода

служит следующее рассуждение. Пусть δ, Δ – фиксированные достаточно малые положительные числа и пусть $\gamma^2 \in [\varepsilon_1 + \delta, \varepsilon_2 - \Delta]$. В этом случае функция $1/w$ равномерно по γ стремится к предельной функции $1/w_0$, где $w_0 = k_2^2 + \eta^2$, при $\alpha \rightarrow 0$. Этот результат позволяет перейти к пределу под знаком интеграла. Необходимо отметить, что в линейной задаче при $\gamma^2 \geq \varepsilon_2$ решение не может существовать при целых $n \geq 2$. Действительно, при $n \geq 2$ величина η будет принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$ и, значит, соответствующий интеграл в (31) будет расходящимся. Таким образом, при $\gamma^2 \geq \varepsilon_2$ в линейном пределе уравнение (31) дает либо $\Phi(E_r, E_t; 0) = h$ при условии, что точки $\pm\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} \notin \left[k_3 \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r}, k_1 \right]$, либо $\Phi(E_r, E_t; 1) = h$ при условии, что точки $\pm\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} \notin \left(-\infty, k_1 \right] \cup \left[k_3 \frac{E_i - E_r}{E_i + E_r}, +\infty \right)$. В последних случаях предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в (31) можно обосновать таким же образом, как и выше.

Заключение

В работе предложен подход к изучению задачи дифракции поляризованных электромагнитных волн на плоском диэлектрическом слое с нелинейной диэлектрической проницаемостью. Искомыми в такой задаче являются коэффициенты отражения E_r и прохождения E_t ; амплитуда падающей волны E_i считается известной. Ясно, что явные формулы для E_r и E_t можно получать лишь в самых простых случаях. Действительно, если нелинейность в слое имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha_1 |\mathbf{E}|^2 + \alpha_2 |\mathbf{E}|^4$, то задачу можно проинтегрировать в эллиптических функциях, что позволяет надеяться на явное выражение искомых коэффициентов. Однако для более сложных нелинейностей получить явные формулы невозможно (для электромагнитных ТМ-волн явные формулы не удастся получить даже для нелинейности вида (1)). Заметим, что более сложные нелинейности активно изучаются в нелинейной оптике, и поэтому изучение аналогичной задачи для более сложных функций нелинейности оправдано.

Указанные выше трудности заставляют искать новые подходы к изучению рассматриваемой задачи. Один из таких подходов, основанный на методе интегральных дисперсионных уравнений [5], предложен в данной статье. Этот подход позволяет получить формулы, связывающие амплитуду падающей волны E_i с коэффициентами отражения E_r и прохождения E_t , в данном случае это формула (31). Несмотря на то, что это неявная формула, она обладает некоторыми достоинствами по сравнению с исходной задачей дифракции (5)–(6). Действительно, задача (5)–(6) есть краевая задача для дифференциального уравнения, а уравнение (31) – трансцендентное уравнение относительно E_r , E_t при условии (18). Кроме того, из вывода уравнения (31) ясно, что уравнение такого типа можно получить и для функций нелинейно-

сти $f \equiv f(E^2)$ из достаточно широкого класса (т.е. даже и в тех случаях, когда заведомо невозможно найти явные решения нелинейного уравнения, аналогичного (5)).

Список литературы

1. **Leung, K. M.** Scattering of transverse-electric electromagnetic waves with a finite nonlinear film / K. M. Leung // *Journal of the Optical Society of America B.* – 1988. – Vol. 5 (2). – P. 571–574.
2. **Leung, K. M.** Exact results for the scattering of electromagnetic waves with a nonlinear film / K. M. Leung // *Physical Review B.* – 1989. – Vol. 39 (6). – P. 3590–3598.
3. **Leung, K. M.** Scattering of transverse-magnetic waves with a nonlinear film: formal field solutions in quadratures / K. M. Leung and R. L. Lin // *Physical Review B.* – 1991. – Vol. 44 (10). – P. 5007–5012.
4. **Schürmann, H. W.** Reflection and transmission of a plane te-wave at a lossless nonlinear dielectric film / H. W. Schürmann, V. S. Serov, and Yu. V. Shestopalov // *Physica D.* – 2001, October. – Vol. 158 (1-4). – P. 197–215.
5. **Valovik, D. V.** Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem / D. V. Valovik // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* – 2014. – Vol. 20 (12). – P. 52–58. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.04.007.
6. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
7. **Адамс, М.** Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – М. : Мир, 1984. – 512 с.

References

1. Leung K. M. *Journal of the Optical Society of America B.* 1988, vol. 5 (2), pp. 571–574.
2. Leung K. M. *Physical Review B.* 1989, vol. 39 (6), pp. 3590–3598.
3. Leung K. M. and Lin R. L. *Physical Review B.* 1991, vol. 44 (10), pp. 5007–5012.
4. Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. *Physica D.* 2001, October, vol. 158 (1-4), pp. 197–215.
5. Valovik D. V. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2014, vol. 20 (12), pp. 52–58. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.04.007.
6. Vaynshteyn L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz', 1988, 440 p.
7. Adams M. *Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov* [Introduction into the theory of optical waveguides]. Moscow: Mir, 1984, 512 p.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
профессор, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitriy Viktorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Демченко Анна Евгеньевна
студент, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Demchenko Anna Evgen'evna
Student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: dem-94@mail.ru

УДК 517.927, 517.968, 519.6

Валовик, Д. В.

Об одном подходе к задаче дифракции поляризованных электромагнитных волн на диэлектрическом слое, заполненном нелинейной средой / Д. В. Валовик, А. Е. Демченко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 28–37. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-3

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

Аннотация.

Актуальность и цели. Одной из важных задач в теории расслоенных пространств является изучение инфинитезимальных автоморфизмов связностей в этих пространствах. Инфинитезимальные изометрии в касательных расслоениях изучались Ш. Сасаки. Вопросы о каноническом разложении инфинитезимального аффинного преобразования рассматривались К. Яно и Ш. Кобаяси. Среди отечественных ученых Х. Шадыев исследовал движения в касательных расслоениях первого порядка с синектической связностью. В данной работе рассмотрены касательные расслоения со связностью полного лифта в случае, когда база расслоения является максимально подвижным двумерным пространством аффинной связности. Исследован один из типов двумерных пространств аффинной связности, полученных И. П. Егоровым, группы движений которых имеют максимальную размерность 4. Построена алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ и решен вопрос о разрешимости данной алгебры.

Материалы и методы. Объектом изучения является пространство $(TM, \nabla^{(0)})$. Используются методы тензорного анализа, теории производной Ли. Многообразия, функции, тензорные поля предполагаются гладкими класса C^∞ .

Результаты. Приведена оценка сверху групп движений касательного расслоения TM_2 , снабженного полным лифтом максимально подвижной аффинной связности с ненулевым тензорным полем кривизны. Построена алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над многообразием M_2 с соответствующими компонентами связности и решена задача о разрешимости данной алгебры.

Выводы. Алгебра Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над максимально-подвижным двумерным пространством (M_2, ∇) , определяемым коэффициентами связности (6), является разрешимой.

Ключевые слова: аффинные преобразования, алгебра Ли, касательные расслоения, автоморфизм.

G. A. Sultanova

ON LIE ALGEBRAS OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS IN TANGENT BUNDLES WITH A COMPLETE LIFT CONNECTION

Abstract.

Background. The study of infinitesimal automorphisms of connections in the fiber spaces is one of the important problems in the theory of these spaces. The infini-

tesimal isometrics of tangent bundles were studied by S. Sasaki. Yano and Kobayashi considered the questions about the canonical decomposition of infinitesimal affine transformations. Among Russian scientists H. Shadyev saw movement in tangent bundles of the first order with synectic connection. In this paper we consider the tangent bundles with a complete lift connection, where the base of the bundle is the most moving two-dimensional space of affine connection. We study one of the types of two-dimensional spaces with affine connection obtained by I. P. Egorov whose movement groups have a maximum dimension of 4. We built algebra of infinitesimal automorphisms of spaces $(TM_2, \nabla^{(0)})$ and clarified the question of solvability of this algebra.

Materials and methods. The object of study is the space $(TM, \nabla^{(0)})$. We are using the methods of the tensor calculus, the theory of Lie derivative. The variety, function, tensor fields are assumed to be smooth of class C^∞ .

Results. We give an estimate from above of groups of motions of the tangent bundle TM_2 , equipped with a complete mobile lift maximum-affine connection with a non-zero curvature tensor field. In the same section we are building Lie algebra of infinitesimal automorphisms of spaces $(TM_2, \nabla^{(0)})$ over a manifold M_2 of connectivity with the appropriate components, and solve the problem of solvability of this algebra.

Conclusions. The Lie algebra \tilde{L} of infinitesimal affine transformations of the space $(TM_2, \nabla^{(0)})$ above the maximum-moving two-dimensional space (M_2, ∇) , defined by the connection coefficients (6), is solvable.

Key words: affine transformations, Lie algebra, tangent bundles, automorphism.

Введение

Инфинитезимальные аффинные преобразования в касательных расслоениях первого порядка, снабженных связностью полного лифта, изучались К. Яно, Ш. Кобаяси [1]. Вопрос о каноническом разложении инфинитезимальных аффинных преобразований рассматривал Х. Шадыев для синектических связностей на касательных расслоениях первого порядка [2].

В настоящей работе изучается строение алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта. Поскольку изучение группы движений двумерных пространств аффинной связности занимает особое место в теории движений, мы исследуем алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований над проективно плоскими, но не плоскими двумерными пространствами аффинной связности, допускающими группы движений максимальной размерности 4. При этом используем классификацию таких пространств, полученных И. П. Егоровым [3].

1. Предварительные сведения

Пусть M – гладкое многообразие класса C^∞ размерности n , TM – его касательное расслоение с канонической проекцией π . Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции f с базы M в касательное расслоение TM . Если x^i – локальные координаты в некоторой окрестности $U \subset M$, то на $\pi^{-1}(U) \subset TM$ возникают

естественные локальные координаты x_0^i, x_1^i . Закон преобразования этих координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i)$ имеет вид [3, 4]:

$$\begin{cases} \bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, \dots, x_0^n), \\ \bar{x}_1^i = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right)_{(0)} x_1^k. \end{cases} \quad (1)$$

Приведем определения лифтов некоторых объектов с многообразия M в касательное расслоение TM , которые мы будем использовать в работе.

Определение 1. Функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ называется полным лифтом функции f с базы M в касательное расслоение TM .

Пусть X – векторное поле, заданное на M . На TM векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$ в локальных координатах определяются соотношениями:

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1, \quad X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1.$$

Здесь $\partial_i^0, \partial_i^1$ – операторы частного дифференцирования по переменным x_0^i, x_1^i соответственно.

Если на базе M задана линейная связность ∇ , то на TM существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условиям [1, 5]:

$$\nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)}, \quad \nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(1)} = \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \quad \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(1)} = 0.$$

Определение 2 [6]. Пусть G – тензорное поле типа $(1,1)$ на M и $G = G_j^i \partial_j$ – его локальное представление. Векторное поле $\gamma G = (G_j^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$ называется вертикально-векторным поднятием аффинора G . В дальнейшем будем пользоваться для обозначения γG символом $G^{V\gamma}$.

Определение 3 [4]. Векторное поле $G^{H\gamma}$, заданное в локальных координатах соотношением

$$G^{H\gamma} = (G_j^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^H,$$

где $\partial_j^H = \partial_j^0 - (\Gamma_{js}^p)_{(0)} x_1^s \partial_p^1$, называется горизонтально-векторным поднятием аффинора G .

Пусть K – тензорное поле типа $(1, r)$.

Определение 4. Объект $K^{H\gamma^r}$, определенный равенством

$$K^{H\gamma^r} = \left(K_{j_1 \dots j_r}^i \right)_{(0)} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} D_i,$$

где $D_i = \partial_i^H$, назовем $H\gamma^r$ -лифтом тензорного поля $K \in \mathfrak{S}_r^1(M)$.

Объект $K^{H\gamma^r}$ является векторным полем на TM ; это следует из определения вертикального лифта функций, законов преобразования x_1^i и D_i .

При $r=1$ мы получим горизонтально-векторное поднятие аффинора K , а при $r=0$ – горизонтальный лифт векторного поля K с многообразия M в касательное расслоение TM .

Определение 5. Векторное поле $K^{V\gamma^r} = (K_{j_1 \dots j_r}^i)_{(0)} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^1$ назовем

$V\gamma^r$ -лифтом тензорного поля K типа $(1,r)$. Ясно, что при $r=1$ мы получим вертикально-векторное поднятие аффинора K , а при $r=0$ – вертикальный лифт векторного поля K с M в TM .

Эти определения могут быть обобщены. Введем тензорные поля, полученные из тензорного поля K типа $(1,r)$ и тензорного поля Q типа $(1,1)$.

Определим тензорное поле $F \bullet^q Q$ условием

$$F \bullet^q Q(X_1, \dots, X_q, \dots, X_r) = F(X_1, \dots, X_{i-1}, Q(X_q), \dots, X_r).$$

Тензорные поля описанного типа будут использоваться в дальнейшем.

Введем еще два лифта в касательное расслоение, которые обозначим через $H\gamma^r$, $V\gamma^r$.

Отметим тождества, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Предложение 1. γ -лифт тензорных полей типа $(1,1)$ обладает следующими свойствами. Для любых тензорных полей P, Q типа $(1,1)$ на M и любого скаляра $\lambda \in R$ имеют место равенства:

а) $\gamma(P+Q) = \gamma P + \gamma Q$;

б) $\gamma(\lambda Q) = \lambda \gamma Q$;

в) $[\gamma P, \gamma Q] = \gamma([P, Q])$, где $[P, Q] = P \bullet^1 Q - Q \bullet^1 P$.

Доказательство. Свойства (а) и (б) следуют из определения γ -лифта тензорного поля типа $(1,1)$. Тожество (в) докажем прямыми вычислениями:

$$\begin{aligned} [\gamma P, \gamma Q] &= \left[\left(P_k^m \right)_{(0)} x_1^k \partial_m^1, \left(Q_p^s \right)_{(0)} x_1^p \partial_s^1 \right] = \left(P_k^m Q_m^s \right)_{(0)} x_1^k \partial_s^1 - \left(Q_p^s P_s^m \right)_{(0)} x_1^p \partial_m^1 = \\ &= \left(P_k^m Q_m^s - G_k^m Q_m^s \right)_{(0)} x_1^k \partial_s^1 = \left([P, Q]_k^s \right)_{(0)} x_1^k \partial_s^1 = \gamma([P, Q]). \end{aligned}$$

Предложение 2. Для любых тензорных полей P, Q типа $(1,1)$, заданных на M , и любого скаляра $\lambda \in R$ выполняются следующие равенства:

а) $(P+Q)^{H\gamma} = P^{H\gamma} + Q^{H\gamma}$;

б) $(\lambda P)^{H\gamma} = \lambda P^{H\gamma}$;

в) $[P^{H\gamma}, Q^{H\gamma}] = (\nabla Q \bullet^1 P - \nabla P \bullet^1 Q - (T \bullet^1 P) \bullet^2 Q)^{H\gamma^2} - ((R \bullet^1 P) \bullet^2 Q)^{V\gamma^3}$,

где T – тензорное поле кручения связности ∇ .

Доказательство. Тождества (а) и (б) непосредственно следуют из определения $H\gamma$ -лифта. Равенство (в) докажем прямыми вычислениями, используя локальные координаты:

$$\begin{aligned} [P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] &= \left[\left(P_t^i \right)_{(0)} x_1^t D_i, \left(Q_s^j \right)_{(0)} x_1^s D_j \right] = \left(P_t^i \right)_{(0)} x_1^t D_i \left(\left(Q_s^j \right)_{(0)} x_1^s \right) D_j - \\ &\quad - \left(Q_s^j \right)_{(0)} x_1^s D_j \left(\left(P_t^i \right)_{(0)} x_1^t \right) D_i + \left(P_t^i Q_s^j \right)_{(0)} x_1^t x_1^s [D_i, D_j]. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} D_i \left(\left(Q_s^j \right)_{(0)} x_1^s \right) &= \left(\partial_i Q_s^j \right)_{(0)} x_1^s + \left(Q_s^j \right)_{(0)} D_i x_1^s = \\ &= \left(\partial_i Q_s^j \right)_{(0)} x_1^s - \left(Q_s^j \right)_{(0)} \left(\Gamma_{ik}^s \right)_{(0)} x_1^k = \left(\partial_i Q_k^j - Q_s^j \Gamma_{ik}^s \right)_{(0)} x_1^k, \end{aligned}$$

$$\text{а } \left(\partial_i Q_k^j - Q_s^j \Gamma_{ik}^s \right)_{(0)} x_1^k = \nabla_i Q_k^j - Q_k^s \Gamma_{is}^j \text{ и } [D_i, D_j] = - \left(R_{kij}^s \right)_{(0)} x_1^k \partial_s^1,$$

мы получим

$$\begin{aligned} [P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] &= \left(P_t^i \left(\nabla_i Q_k^j - Q_k^s \Gamma_{is}^j \right) \right)_{(0)} x_1^t x_1^k D_j - \left(Q_t^j \left(\nabla_j P_k^i - P_k^s \Gamma_{js}^i \right) \right)_{(0)} x_1^t x_1^k D_i - \\ &\quad - \left(P_t^i Q_k^j R_{kij}^s \right)_{(0)} x_1^t x_1^k \partial_s^1 = \left(P_t^j \nabla_j Q_k^i - Q_t^j \nabla_j P_k^i + Q_t^j P_k^s \Gamma_{js}^i - Q_k^s P_t^j \Gamma_{js}^i \right)_{(0)} x_1^t x_1^k D_i - \\ &\quad - \left(\left(R_{\bullet P}^1 \right)_{\bullet Q}^2 \right)^{V\gamma^3} = \left(\nabla Q_{\bullet P}^1 - \nabla P_{\bullet Q}^1 \right)^{H\gamma^2} - \left(\left(R_{\bullet P}^1 \right)_{\bullet Q}^2 \right)^{V\gamma^3} - \\ &\quad - \left(P_t^j Q_k^s T_{js}^i \right)_{(0)} x_1^k x_1^t D_i = \left(\nabla Q_{\bullet P}^1 - \nabla P_{\bullet Q}^1 - \left(T_{\bullet P}^1 \right)_{\bullet Q}^2 \right)^{H\gamma^2} - \left(\left(R_{\bullet P}^1 \right)_{\bullet Q}^2 \right)^{V\gamma^3}. \end{aligned}$$

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования пространств $(TM, \nabla^{(0)})$

Определение 6 [3]. Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства аффинной связности (M, ∇) , если

$$L_X \nabla = 0, \quad (2)$$

где L_X – символ производной Ли относительно векторного поля X .

В настоящей работе мы изучаем инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения TM , снабженного связностью $\nabla^{(0)}$ полного лифта связности ∇ с нулевым тензорным полем T кручения, заданной на базе M .

Х. Шадыев в работе [2] доказал, что векторное поле \tilde{X} на TM , снабженное связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$, является инфинитезимальным преобразованием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) существуют векторные поля X, Y , тензорные поля G, F типа $(1,1)$ на M такие, что

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma} + F^{H\gamma}; \quad (3)$$

2) имеют место равенства

$$L_X \nabla = 0, L_Y \nabla = 0, \nabla G = 0, R_{\bullet}^1 G - G_{\bullet}^1 R = 0, R_{\bullet}^1 F = F_{\bullet}^1 R = 0. \quad (4)$$

Из этого результата следует, что каждое слагаемое в разложении (3) является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(TM, \nabla^{(0)})$. Действительно, векторное поле $X^{(0)}$ можно представить следующим образом:

$$X^{(0)} = X^{(0)} + 0^{(1)} + 0^{V\gamma} + 0^{H\gamma},$$

где 0 в выражении $0^{(1)}$ является нулевым векторным полем, а 0 в последних двух слагаемых – нулевое тензорное поле типа $(1,1)$. Равенства (4) имеют место. Следовательно, векторное поле $X^{(0)}$, входящее в разложение (3), является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(TM, \nabla^{(0)})$. Аналогичным образом доказывается, что остальные слагаемые также являются инфинитезимальными аффинными преобразованиями.

Отметим, что имеет место

Предложение 3. Для каждого инфинитезимального аффинного преобразования \tilde{X} пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ разложение (3) является единственным.

Доказательство. Достаточно установить, что если \tilde{X} – нулевое векторное поле, то каждое слагаемое в (3) – нулевое. Пусть $p \in M$ – произвольная точка многообразия M , (U, x^i) – координатная окрестность такая, что $p \in U$. Тогда $x^i(p) = p^i$ и в каждой точке \tilde{p} слоя над ней $\tilde{X}_{\tilde{p}} = 0$. Выберем в слое $\pi^{-1}(p)$ n линейно-независимых касательных векторов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$. В координатной окрестности $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ будем иметь $x_0^i(\tilde{p}_s) = p^i, x_1^i(\tilde{p}_s) = (p_1^i)_s$, причем матрица, строками которой являются наборы $(p_1^i)_s (s=1, 2, \dots, n)$, является невырожденной. Из условия $\tilde{X}_{\tilde{p}_s} = 0$ имеем

$$X_{\tilde{p}_s}^{(0)} x_0^i + F_{\tilde{p}_s}^{H\gamma} x_0^i = 0.$$

Отсюда следует, что $X^i(p) + F_j^i(p) (p_1^j)_s = 0$.

Запишем эти равенства для точек $\lambda\tilde{p}_s, \lambda \neq 1$, тогда

$$X^i(p) + \lambda \left(F_j^i(p) \left(p_1^j \right)_s \right) = 0.$$

Следовательно, $(\lambda - 1)F_j^i(p) \left(p_1^j \right)_s = 0$. Поэтому $F_j^i(p) \left(p_1^j \right)_s = 0$.

Отсюда в силу линейной независимости векторов $(p_1^j)_s$, получим $F_j^i(p) = 0$.

Тогда и $X^i(p) = 0$. Учитывая эти равенства, воспользуемся равенством

$\tilde{X}_{\tilde{p}_s} x_1^i = 0$. Тогда $Y^i(p) + G_j^i(p) \left(p_1^j \right)_s = 0$. Отсюда, рассуждая аналогично

предыдущим рассуждениям, получим $Y^i(p) = 0, G_j^i(p) = 0$. Таким образом,

имеем $X_{\tilde{p}}^{(0)} = 0, Y_{\tilde{p}}^{(1)} = 0, G_{\tilde{p}}^{V\gamma} = 0, F_{\tilde{p}}^{H\gamma} = 0$ для любой точки \tilde{p} .

Пусть $\tilde{X} = X_1^{(0)} + Y_1^{(1)} + G_1^{V\gamma} + F_1^{H\gamma}$, $\tilde{X} = X_2^{(0)} + Y_2^{(1)} + G_2^{V\gamma} + F_2^{H\gamma}$ – два разложения инфинитезимального аффинного преобразования \tilde{X} . Вычитая из первого равенства второе и учитывая свойства лифтов, используемых в этих разложениях, получим

$$0 = (X_1 - X_2)^{(0)} + (Y_1 - Y_2)^{(1)} + (G_1 - G_2)^{V\gamma} + (F_1 - F_2)^{H\gamma}.$$

Доказанное выше свойство позволяет получить

$$X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, G_1 = G_2, F_1 = F_2.$$

Тем самым предложение 3 доказано.

3. Строение алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$

Пусть \tilde{L} – множество всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$. Это множество относительно естественных операций сложения, умножения на скаляры из R и операции коммутирования образует алгебру Ли, размерность которой не больше $2n(2n+1)$, где n – размерность многообразия M .

Рассмотрим подмножества $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}, G^{V\gamma}, F^{H\gamma}$ соответственно.

Из свойств лифтов, указанных здесь, заключаем, что каждое из этих подмножеств векторного пространства \tilde{L} замкнуто относительно операции сложения и умножения на скаляры. Поэтому $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ являются подпространствами векторного пространства \tilde{L} . Учитывая строение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(TM, \nabla^{(0)})$, заключаем, что \tilde{L} является суммой этих подпространств. На основании предложения 3 имеем, что эта сумма является прямой суммой подпространств $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$. Таким образом, имеет место

Предложение 4. Векторное пространство \tilde{L} всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ является суммой подпространств $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$.

В качестве следствия этого предложения имеем

$$\dim \tilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 + \dim L^3.$$

На основании тождества $L_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{\nabla} = L_{\tilde{X}} \circ L_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla} - L_{\tilde{Y}} \circ L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}$ для производной Ли линейной связности заключаем, что коммутатор любых двух инфинитезимальных аффинных преобразований является инфинитезимальным аффинным преобразованием. Из этого свойства инфинитезимальных аффинных преобразований и свойства полного, вертикального лифтов векторных полей имеем: для любых инфинитезимальных аффинных преобразований $X^{(0)}, Y^{(0)}$ их коммутатор $[X^{(0)}, Y^{(0)}]$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием и $[X^{(0)}, Y^{(0)}] = [X, Y]^{(0)}$. Это означает, что подпространство L^1 является подалгеброй алгебры \tilde{L} .

Так как $[X^{(1)}, Y^{(1)}] = 0$, то L^2 также является подалгеброй алгебры \tilde{L} , причем абелевой. На основании предложения 1 (в) заключаем, что L^2 является подалгеброй алгебры \tilde{L} . Из предложения 2 и тождеств (4) следует, что L^3 также является подалгеброй алгебры \tilde{L} , причем абелевой. Тем самым доказано

Предложение 5. Подпространства $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ пространства \tilde{L} являются подалгебрами алгебры Ли \tilde{L} , причем подалгебры L^1 и L^3 абелевы.

Пусть $g(\nabla)$ – алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M, ∇) . На основании свойств полного и вертикального лифтов векторных полей с M в TM можно доказать

Предложение 6. Векторные пространства L^0, L^1 изоморфны векторному пространству $g(\nabla)$. Отсюда заключаем, что $\dim L^0 = \dim L^1 = \dim g(\nabla) = r$. Поэтому

$$\dim \tilde{L} = 2r + \dim L^2 + \dim L^3.$$

Отметим также еще одно предложение, которое доказывается на основании свойств полного лифта векторных полей.

Предложение 7. Подалгебра L^0 алгебры \tilde{L} изоморфна алгебре Ли $g(\nabla)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $h: g(\nabla) \rightarrow L^0$, заданное условием $h(X) = X^{(0)}$. Тогда для любых $\lambda, \mu \in R$, $X, Y \in g(\nabla)$ $h(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X)^{(0)} + (\mu Y)^{(0)} = \lambda h(X) + \mu h(Y)$. Очевидно, что h сюръективно.

Покажем инъективность h . Пусть $X^{(0)} = 0$. Для любой точки $p \in M$ имеем для \tilde{p} над p $X_{\tilde{p}}^{(0)} = 0$. Поэтому $X_{\tilde{p}}^{(0)} x_i^0 = 0$. Отсюда $(Xx^j)_{(0)}(\tilde{p}) = 0$.

Так как $\tilde{p} = \pi(p)$, то $(Xx^i)(p) = 0$. Это значит, что $X^i(p) = 0$, т.е. $X_p = 0$ для любой точки $p \in M$. Инъективность отображения h доказана. Далее,

$$h([X, Y]) = [X, Y]^{(0)} = [X^{(0)}, Y^{(0)}] = [h(X), h(Y)].$$

Таким образом, h – изоморфизм.

4. О разрешимости алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов расслоения $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над максимально подвижным двумерным пространством

Данный раздел посвящен исследованию алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над одним из максимально подвижных двумерных пространств (M_2, ∇) .

В работе [7] показано, что если пространство (M_2, ∇) обладает группой движений максимальной размерности, то группа движений пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ имеет размерность

$$\tilde{r} = 8 + \dim L^2 + \dim L^3.$$

Поэтому для нахождения размерности алгебры Ли \tilde{L} необходимо установить размерности ее подалгебр L^2 и L^3 .

Теорема 1 [7]. Алгебра Ли L^3 инфинитезимальных аффинных преобразований вида $F^{H\gamma}$ является нульмерной, если база M является двумерной.

Таким образом, общий вид алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований изучаемых пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ имеет вид

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G,$$

где $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $G \in \mathfrak{S}_1^1(M)$.

В работе [7] показано также, что совокупность решений дифференциального уравнения $\nabla G = 0$ для двумерных максимально подвижных пространств аффинной связности ненулевой кривизны является двумерной алгеброй Ли.

Однако, если векторное поле γG входит в каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования, то аффиноор G удовлетворяет еще следующим алгебраическим соотношениям, которые следуют из равенства $R_{\bullet}^1 G - G_{\bullet}^1 R = 0$: $G_j^s R_{ksl}^i - G_s^i R_{kjl}^s = 0$.

Поэтому пространство решений уравнения $\nabla G = 0$ в этом случае является одномерным. Следовательно базис алгебры Ли L^2 состоит из одного векторного поля Лиувилля на TM

$$K = x_1^j \partial_j^1. \tag{5}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM_2 , снабженного полным лифтом максимально подвижной аффинной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.

Учитывая, что размерность группы Ли преобразований многообразия равна размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований [8], мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Группа движений касательного расслоения TM_2 , снабженного полным лифтом максимально подвижной аффинной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.

И. П. Егоровым доказано, что существует три типа двумерных пространств аффинной связности (M_2, ∇) , группы движений которых имеют максимальную размерность 4 [3].

Рассмотрим пространство (M_2, ∇) , определенное коэффициентами связности

$$(\Gamma^1_{mk}) = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (\Gamma^2_{mk}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где a – произвольная постоянная.

Составляющие тензора Риччи:

$$R_{11} = -a(2a+1), R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0.$$

Базис алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований рассматриваемого пространства составляют векторные поля:

$$X_1 = \partial_1, X_2 = x^2 \partial_2, X_3 = e^{x^1} \partial_2, X_4 = \partial_2. \quad (7)$$

Для получения базисных векторных полей алгебры Ли \tilde{L} найдем вертикальные и полные лифты векторных полей (7).

Вертикальные лифты $X^{(1)}$ векторных полей (7), обозначаемые через Y , будут иметь вид

$$Y_1 = \partial_1^1, Y_2 = x_0^2 \partial_2^1, Y_3 = e^{x_0^1} \partial_2^1, Y_4 = \partial_2^1. \quad (8)$$

Полные лифты $X^{(0)} = Z$ векторных полей (7) определяются соотношениями:

$$Z_1 = \partial_1^0, Z_2 = x_0^2 \partial_2^0 + x_1^2 \partial_2^1, Z_3 = e^{x_0^1} \partial_2^0 + x_1^1 e^{x_0^1} \partial_2^1, Z_4 = \partial_2^0. \quad (9)$$

Прежде чем решить вопрос о разрешимости алгебры Ли \tilde{L} , приведем определение разрешимой алгебры Ли.

Пусть L – алгебра Ли. Определим следующую последовательность идеалов алгебры L (производный ряд):

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \dots, L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}].$$

Определение 7 [8]. Алгебра Ли L называется разрешимой, если $L^{(n)} = 0$ при некотором n .

Для нахождения первой производной алгебры Ли \tilde{L} вычислим коммутаторы вида $[\gamma G, X^{(1)}]$, $[\gamma G, X^{(0)}]$, $[X^{(1)}, Y^{(0)}]$, $[X^{(0)}, Y^{(0)}]$ векторных полей (5), (8), (9), используя их свойства.

Из свойства коммутаторов $[\gamma G, X^{(1)}] = -(G(X))^{(1)}$ получим

$$[K, Y_1] = -\partial_1^1 = -Y_1, [K, Y_2] = -x_0^2 \partial_2^1 = -Y_2.$$

$$[K, Y_3] = -e^{x_0^1} \partial_2^1 = -Y_3, [K, Y_4] = -\partial_2^1 = -Y_4.$$

Вычислим коммутаторы вида $[\gamma G, X^{(0)}] = \gamma(L_X G)$, будем иметь

$$[K, Z_1] = 0, [K, Z_2] = 0, [K, Z_3] = 0, [K, Z_4] = [x_1^j \partial_j^1, \partial_2^0] = 0.$$

Так как $[X^{(1)}, Y^{(0)}] = [X, Y]^{(1)}$, то

$$[Y_1, Z_1] = 0, [Y_1, Z_2] = 0, [Y_1, Z_3] = e^{x_0^1} \partial_2^1 = Y_3, [Y_1, Z_4] = 0;$$

$$[Y_2, Z_1] = 0, [Y_2, Z_2] = 0, [Y_2, Z_3] = -e^{x_0^1} \partial_2^1 = -Y_3, [Y_2, Z_4] - \partial_2^1 = -Y_4;$$

$$[Y_3, Z_1] = -e^{x_0^1} \partial_2^1 = -Y_3, [Y_3, Z_2] = e^{x_0^1} \partial_2^1 = Y_3, [Y_3, Z_3] = 0, [Y_3, Z_4] = 0;$$

$$[Y_4, Z_1] = 0, [Y_4, Z_2] = \partial_2^1 = Y_4, [Y_4, Z_3] = 0, [Y_4, Z_4] = 0.$$

Вычислим коммутаторы вида $[X^{(0)}, Y^{(0)}] = [X, Y]^{(0)}$:

$$[Z_1, Z_2] = 0, [Z_1, Z_3] = e^{x_0^1} \partial_2^0 + e^{x_0^1} x_1^1 \partial_2^1 = Z_3, [Z_1, Z_4] = 0,$$

$$[Z_2, Z_3] = -e^{x_0^1} \partial_2^0 - e^{x_0^1} x_1^1 \partial_2^1 = -Z_3, [Z_2, Z_4] = -\partial_2^0 = -Z_4, [Z_3, Z_4] = 0.$$

Таким образом, мы получили следующие структурные соотношения алгебры Ли \tilde{L} пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над пространствами аффинной связности типа 1:

$$[Y_i, K] = Y_i (i = 1, 2, 3, 4), [Y_1, Z_3] = Y_3, [Y_2, Z_3] = -Y_3,$$

$$[Y_2, Z_4] = -Y_4, [Y_3, Z_1] = -Y_3, [Y_3, Z_2] = Y_3,$$

$$[Y_4, Z_2] = Y_4, [Z_1, Z_3] = Z_3, [Z_2, Z_3] = -Z_3, [Z_2, Z_4] = -Z_4.$$

Здесь указаны лишь коммутаторы, отличные от нуля. Отсюда заключаем, что производная алгебра \tilde{L}' алгебры Ли \tilde{L} является линейной оболочкой векторных полей:

$$Y_i (i = 1, 2, 3, 4), Z_3, Z_4. \quad (10)$$

Вычислим вторую производную для алгебры Ли \tilde{L} , для этого найдем коммутаторы векторных полей (10):

$$[Y_i, Y_j] = 0, [Y_1, Z_3] = Y_3, [Y_1, Z_4] = 0, [Y_2, Z_3] = -Y_3, [Y_2, Z_4] = -Y_4,$$

$$[Y_3, Z_3] = 0, [Y_3, Z_4] = 0, [Y_4, Z_3] = 0, [Y_4, Z_4] = 0, [Z_3, Z_4] = 0.$$

Отсюда следует, что вторая производная алгебра \tilde{L}'' алгебры Ли \tilde{L} будет линейной оболочкой векторных полей Y_3, Y_4 . Коммутатор этих векторных полей будет равен нулю, поэтому третья производная алгебра $\tilde{L}''' = \{0\}$. Таким образом, доказана

Теорема 4. Алгебра Ли \tilde{L} инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над максимально-подвижным двумерным пространством (M_2, ∇) , определяемым коэффициентами связности (6), является разрешимой.

Список литературы

1. **Яно, К.** Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry / К. Яно, S. Ishihara. – New York, Marcel Dekker, 1973. – 423 p.
2. **Шадыев, Х.** Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении / Х. Шадыев // Труды геометрического семинара. – 1984. – Т. 16. – С. 117–127.
3. **Егоров, И. П.** Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности / И. П. Егоров // Ученые записки Пензенского педагогического института. – Казань : Изд-во Казанского гос. ун-та, 1965. – С. 5–179.
4. **Танно, S.** Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric / S. Tanno // Tensor, N.S. – 1974. – Vol. 28. – P. 139–144.
5. **Султанов, А. Я.** Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля / А. Я. Султанов // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 64–72.
6. **Sato, J.** Complete lifts from a manifold tangent bundle / J. Sato // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – Vol. 20. – № 4. – P. 458–468.
7. **Султанова, Г. А.** О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально-подвижными пространствами аффинной связности / Г. А. Султанова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып. 46. – Калининград, 2015. – С. 153–161.
8. **Понтрягин, Л. С.** Непрерывные группы : моногр. / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, Физматлит, 1973. – 527 с.

References

1. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry*. New York, Marcel Dekker, 1973, 423 p.
2. Shadyev Kh. *Trudy geometricheskogo seminar* [Proceedings of a geometrical seminar]. 1984, vol. 16, pp. 117–127.
3. Egorov I. P. *Uchenye zapiski Penzenskogo pedagogicheskogo instituta* [Proceedings of Penza Pedagogical Institute]. Kazan: Izd-vo Kazanskogo gos. un-ta, 1965, pp. 5–179.
4. Tanno S. *Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric*. Tensor, N.S. 1974, vol. 28, pp. 139–144.

5. Sultanov A. Ya. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1999, no. 9, pp. 64–72.
6. Sato J. *Kodai Math. Semin. Repts.* 1968, vol. 20, no. 4, pp. 458–468.
7. Sultanova G. A. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur* [Differential geometry of figure manifold]. Issue. 46. Kaliningrad, 2015, pp. 153–161.
8. Pontryagin L. S. *Nepreryvnye gruppy: monogr.* [Continuous groups: monograph]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1973, 527 p.

Султанова Галия Алиевна
аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Sultanova Galiya Alievna
Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: sultgaliya@yandex.ru

УДК 514.76

Султанова, Г. А.

Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта / Г. А. Султанова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 38–50. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-4

ОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – исследование процесса образования волн при обтекании потоком идеальной жидкости бесконечной глубины кругового цилиндра, находящегося под поверхностью жидкости.

Материалы и методы. Для решения задачи действие цилиндра заменено действием диполя, который заменял бы собой цилиндр при его обтекании неограниченным потоком. Применен метод теории возмущений – метод малого параметра. Разложением неизвестных функций в ряды по степеням малого параметра исходная задача разбита на задачи по порядку малости.

Результаты. С точностью второго приближения получены выражения для потенциала скорости жидкости и ординаты свободной поверхности.

Выводы. Исследовано влияние различных параметров задачи на форму свободной поверхности жидкости.

Ключевые слова: поток идеальной жидкости, обтекание цилиндра, метод последовательных приближений, поверхностные волны.

К. Yu. Basinskiy

OCCURRENCE OF WAVES ON THE SURFACE OF FLUID FLOWING IN A CIRCULAR CYLINDER

Abstract.

Background. The aim of the work is to study the process of formation of waves of ideal fluid of infinite depth flowing around a circular cylinder located below a liquid surface.

Materials and methods. To solve the problem the action of a cylinder was replaced by the action of a dipole, which would replace a cylinder with its unlimited flow stream. The author applied a method of the perturbation theory - the small parameter method. By the decomposition of unknown functions in powers of the small parameter the initial task was broken down into tasks in the order of smallness.

Results. With the accuracy of the second approximation the author obtained expressions for the potential velocity of liquid and the ordinates of free surface.

Conclusions. The researcher has studied the effect of various parameters of the problem on the form of free surface of the liquid.

Key words: ideal fluid flow, flowing around a cylinder, method of successive approximations, surface waves.

Введение

Решение задачи об образовании волн при обтекании кругового цилиндра, находящегося под поверхностью жидкости, обычно находится либо для волн малой амплитуды [1–3], когда условия на поверхности жидкости сводятся к линейным в предположении, что скорость потока значительно превосходит скорость возмущения жидкости, либо с применением численных методов [4–6]. При аналитическом решении нелинейных задач о поверхност-

ных волнах как правило используется метод малого параметра, подробное описание которого можно найти, например, в [2, 7]. Однако рассматриваемые при этом задачи обычно отличаются параметрами среды, а влияние на волновое движение погруженных в жидкость тел не исследуется. В данной работе метод малого параметра применяется для решения нелинейной задачи об образовании волн, вызванном обтеканием кругового цилиндра потоком идеальной жидкости.

1. Задача об обтекании цилиндра

Пусть под поверхностью идеальной жидкости бесконечной глубины расположен цилиндр радиуса a , на который набегаёт поток жидкости со скоростью c (рис. 1). Введём систему координат так, что ось Ox совпадает с невозмущённой свободной поверхностью, а ось Oy направлена вертикально вверх. Центр цилиндра находится в точке $(0, -h)$, а его образующие перпендикулярны плоскости Oxy . Предположим, что движение жидкости потенциально. Кроме того, в силу постановки задачи движение является установившимся. Тогда компоненты вектора скорости возмущённого движения жидкости можно представить в виде

$$u = c + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где функция $\varphi(x, y)$ – потенциал скорости возмущения основного потока, который удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi = 0$.

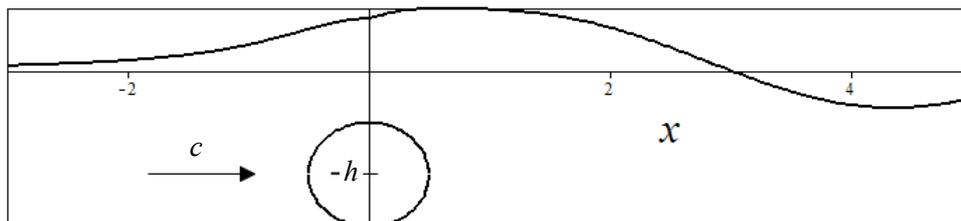


Рис. 1. Геометрия задачи

На свободной поверхности должно выполняться кинематическое условие, которое для случая плоских установившихся волн запишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(c + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{d\xi}{dx}, \quad y = \xi, \quad (1)$$

здесь $\xi(x)$ – ордината свободной поверхности.

Также вдоль свободной поверхности давление p сохраняет постоянное значение, равное значению атмосферного давления:

$$p = p_a, \quad y = \xi.$$

Тогда для точек свободной поверхности интеграл Бернулли запишется в виде

$$\frac{1}{2} \left[\left(c + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + g\xi = \text{const}, \quad y = \xi. \quad (2)$$

Исключим из условий (1) и (2) функцию ξ , продифференцировав второе условие по переменной x и подставив в него вместо производной функции ξ ее выражение из первого условия. Получим

$$\left(c + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(c + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = \xi. \quad (3)$$

На поверхности цилиндра должна равняться нулю нормальная производная потенциала скорости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

При заглублении обе составляющих возмущения скорости должны стремиться к нулю:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow -\infty.$$

2. Линейная задача

Применение метода последовательных приближений требует введения малого параметра, значение которого определяется характеристиками волнового движения. В данной задаче его величину можно задать, исходя из условия малости скорости возмущения относительно скорости потока c . Для этого потребуются сначала решить задачу в линейном приближении, когда условия (1) и (3) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c \frac{d\xi}{dx}, \quad c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = 0. \quad (4)$$

Действие цилиндра заменим действием диполя, который заменял бы собой цилиндр при его обтекании неограниченным потоком [2]. Из этого допущения следует, что вблизи центра цилиндра потенциал φ должен принимать следующий вид [8]:

$$\varphi \approx \frac{a^2 cx}{x^2 + (y + h)^2}.$$

Поэтому функцию φ представим в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{a^2 cx}{x^2 + (y + h)^2} - \frac{a^2 cx}{x^2 + (y - h)^2}. \quad (5)$$

Здесь функция $\Phi(x, y)$ является потенциальной и удовлетворяет согласно второму условию (4) следующему граничному условию:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{4ca^2 ghx}{(x^2 + h^2)^2}, \quad y = 0. \quad (6)$$

Функцию $\Phi(x, y)$ будем искать в следующем виде:

$$\Phi = \int_0^{\infty} A e^{ky} \sin kx dk, \quad (7)$$

соответствующем установившимся волновым движениям. При этом условие затухания волнового движения при заглублении в выражении (7) уже учтено. Подставляя этот вид функции Φ в условие (6), получим равенство для определения функции A :

$$\int_0^{\infty} A \left(k - \frac{g}{c^2} \right) k \sin kx dk = - \frac{4a^2 ghx}{c(x^2 + h^2)^2}.$$

Применим к этому равенству обратное преобразование Фурье:

$$A \left(k - \frac{g}{c^2} \right) k = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4a^2 ghx}{c(x^2 + h^2)^2} \sin kx dx = \frac{2ka^2 g}{c} e^{-kh}.$$

Отсюда получается выражение для функции A :

$$A = \frac{2ca^2 g}{(g - ck)} e^{-kh},$$

подстановка которого в интеграл (7) позволяет определить выражение для потенциала Φ :

$$\Phi = 2ca^2 g \int_0^{\infty} e^{k(y-h)} \frac{\sin kx}{(g - ck)} dk = - \frac{4\pi a^2 g}{c} e^{\frac{g}{c^2}(y-h)} \cos \frac{gx}{c^2}. \quad (8)$$

Тогда выражение для искомой функции φ согласно (5) принимает вид

$$\varphi = - \frac{4\pi a^2 g}{c} e^{\frac{g}{c^2}(y-h)} \cos \frac{gx}{c^2} + \frac{a^2 cx}{x^2 + (y+h)^2} - \frac{a^2 cx}{x^2 + (y-h)^2}.$$

Подставив его в первое условие (4), получим выражение для формы ординаты свободной поверхности далеко за обтекаемым цилиндром:

$$\xi = - \frac{4\pi a^2 g}{c} e^{-\frac{gh}{c^2}} \sin \frac{gx}{c^2} + \frac{2a^2 h}{x^2 + h^2}, \quad (9)$$

которое совпадает с полученным в [2].

3. Метод малого параметра

Для приближенного решения исходной нелинейной задачи воспользуемся методом малого параметра. Малый параметр выберем, исходя из предположения малости скорости возмущения жидкости относительно скорости потока, т.е. малости отношения

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}{c}.$$

Далеко за обтекаемым цилиндром выполняется приближенное соотношение

$$\frac{\max \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}{c} \approx \frac{4\pi a^2 g^2}{c^4}.$$

Поэтому в качестве малого параметра выберем величину

$$\varepsilon = \frac{a^2 g^2}{c^4}. \quad (10)$$

Тогда выражение (5) для функции φ запишется в виде

$$\varphi(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{\varepsilon c^5}{g^2} \left[\frac{x}{x^2 + (y+h)^2} - \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \right]. \quad (11)$$

Неизвестные функции Φ и ξ будем искать в виде степенных рядов по малому параметру ε :

$$\Phi = \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \varepsilon^3\Phi_3 + \dots, \quad (12)$$

$$\xi = \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \varepsilon^3\xi_3 + \dots$$

Сведя условия (1) и (3) разложением в ряд Маклорена входящих в них функций к условиям на фиксированной поверхности $y = 0$ [2, 7] и подставив выражение (11) и ряды (12) в уравнение и граничные условия, можно выпписать задачи первого и второго порядка малости по параметру ε .

Задача первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\Phi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = c \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{4c^5 hx}{g^2(x^2 + h^2)^2}, \quad c^2 \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = \frac{4c^5 hx}{g(x^2 + h^2)^2}, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Для второго порядка малости задача примет следующий вид:

$$\Delta\Phi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = c \frac{d\xi_2}{dx} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} \xi_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \frac{d\xi_1}{dx}, \quad y=0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + g \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = & -\xi_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(c^2 \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} \right) - 2c \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \\ & - c \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{4c^6 h x}{g^2 (x^2 + h^2)^2} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{4c^6 h (h^2 - 3x^2)}{g^2 (x^2 + h^2)^3} \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \\ & + \frac{48c^7 h x (x^2 - h^2)}{g^2 (x^2 + h^2)^4} \xi_1 + \frac{16c^{11} h^2 x (3x^2 - h^2)}{g^4 (x^2 + h^2)^5} \xi_1, \quad y=0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Задача первого порядка малости решена выше, и функции Φ_1 и ξ_1 согласно выражениям (8), (9) и (10) запишутся в виде

$$\Phi_1 = -\frac{4\pi c^3}{g} e^{\frac{g}{c^2}(y-h)} \cos \frac{gx}{c^2}, \quad \xi_1 = -\frac{4\pi c}{g} e^{-\frac{gh}{c^2}} \sin \frac{gx}{c^2} + \frac{2c^4 h}{g^2 (x^2 + h^2)}. \quad (15)$$

Подставив выражения (15) в условия (13) и (14), получим задачу для определения неизвестных функций Φ_2 и ξ_2 , которая решается аналогично линейной задаче, вследствие чего ее решение здесь опускается.

Функции Φ_2 и ξ_2 определяются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & -\frac{4\pi c^3}{g} e^{\frac{2g}{c^2}(y-h)} \sin \frac{2gx}{c^2} + B e^{\frac{g}{c^2}(y-h)} \cos \frac{gx}{c^2}, \\ \xi_2 = & \frac{4\pi c}{g} (c - 2\pi) e^{-\frac{2gh}{c^2}} \cos \frac{2gx}{c^2} + \\ & + \left(B - \frac{8\pi c^4 h}{g^2 (x^2 + h^2)} \right) e^{-\frac{gh}{c^2}} \sin \frac{gx}{c^2} + \frac{8\pi^2 c}{g} e^{-\frac{2gh}{c^2}}, \end{aligned}$$

где

$$B = \frac{2c^9 \pi}{3g^4 h^3} \left[3 + 3 \frac{gh}{c^2} + 3 \left(\frac{gh}{c^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{gh}{c^2} \right)^3 \right] + \frac{32c^3}{g} \left\{ \frac{2\pi g}{c^2 h} - \frac{c^2}{gh} + \right.$$

$$+ \left(1 - \frac{5}{2} \pi \right) \left[e^{-\frac{2gh}{c^2}} Ei \left(\frac{2gh}{c^2} \right) - e^{\frac{2gh}{c^2}} Ei \left(-\frac{2gh}{c^2} \right) \right]$$

Здесь $Ei(z)$ – интегральная показательная функция [9].

Собирая вместе решения задач первого и второго порядка малости, получим приближенное решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} \phi = & -\varepsilon \frac{4\pi c^3}{g} e^{\frac{g}{c^2}(y-h)} \cos \frac{gx}{c^2} + \varepsilon \frac{c^5}{g^2} \left(\frac{x}{x^2 + (y+h)^2} - \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(-\frac{4\pi c^3}{g} e^{\frac{2g}{c^2}(y-h)} \sin \frac{2gx}{c^2} + B e^{\frac{g}{c^2}(y-h)} \cos \frac{gx}{c^2} \right), \\ \xi = & \varepsilon \left(-\frac{4\pi c}{g} e^{-\frac{gh}{c^2}} \sin \frac{gx}{c^2} + \frac{2c^4 h}{g^2(x^2 + h^2)} \right) + \varepsilon^2 \left[\frac{4\pi c}{g} (c - 2\pi) e^{-\frac{2gh}{c^2}} \cos \frac{2gx}{c^2} + \right. \\ & \left. + \left(B - \frac{8\pi c^4 h}{g^2(x^2 + h^2)} \right) e^{-\frac{gh}{c^2}} \sin \frac{gx}{c^2} + \frac{8\pi^2 c}{g} e^{-\frac{2gh}{c^2}} \right], \end{aligned}$$

Для иллюстрации на рис. 2–4 приведены графики формы свободной поверхности при различных значениях радиуса цилиндра (рис. 2), скорости набегающего потока (рис. 3) и глубине расположения цилиндра (рис. 4).

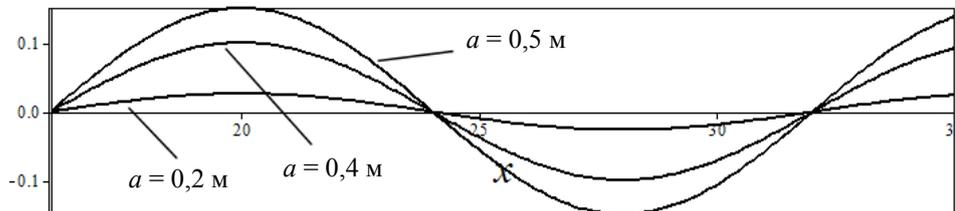


Рис. 2. Форма свободной поверхности при разном радиусе цилиндра ($c = 5$ м/с, $h = 1$ м)

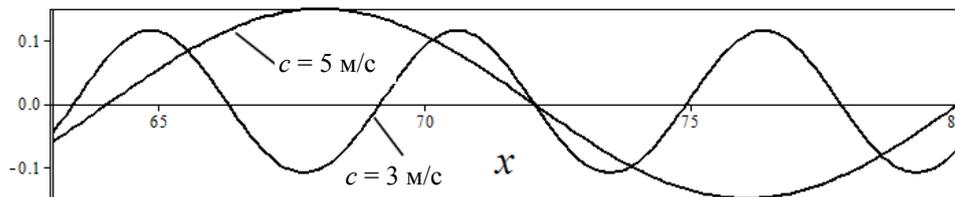


Рис. 3. Форма свободной поверхности при разной скорости потока ($a = 0,5$ м, $h = 1$ м)

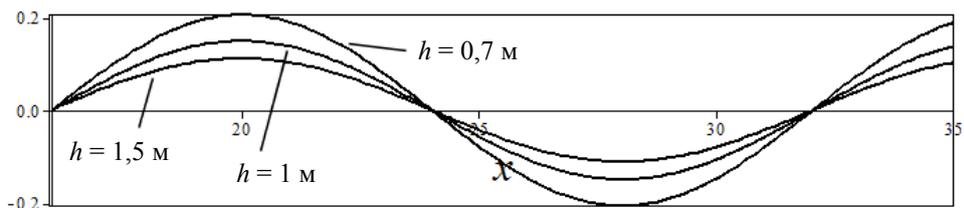


Рис. 4. Форма свободной поверхности при разной глубине расположения цилиндра ($c = 5$ м/с, $a = 0,5$ м)

Из рис. 2–4 видно, что увеличение радиуса цилиндра приводит к возрастанию амплитуды волны. Большой скорости потока соответствуют волны большей длины. Возрастание глубины расположения цилиндра приводит в волновым возмущениям меньшей амплитуды.

Заключение

Таким образом, методом малого параметра получено решение задачи об образовании волн при обтекании кругового цилиндра потоком идеальной жидкости. Проиллюстрировано влияние различных параметров задачи на форму свободной поверхности жидкости.

Список литературы

1. **Елизаров, А. М.** Капиллярно-гравитационные волны при циркуляционном обтекании подводного цилиндра в канале конечной глубины / А. М. Елизаров, К. В. Кириллин, С. И. Филиппов // Ученые записки Казанского университета. Сер.: Физико-математические науки. – 2011. – Т. 153, № 1. – С. 147–154.
2. **Сретенский, Л. Н.** Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
3. **Хаскинд, М. Д.** О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины / М. Д. Хаскинд // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 67–78.
4. **Стурова, И. В.** Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн / И. В. Стурова. – Красноярск, 1990. – 48 с. – (Препринт № 5 / ВЦ СО АН СССР).
5. **Терентьев, А. Г.** Численные методы в гидродинамике / А. Г. Терентьев, К. Е. Афанасьев. – Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1987. – 94 с.
6. **Romate, J. E.** The numerical simulation of nonlinear gravity waves / J. E. Romate // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1990. – Vol. 7, № 4. – P. 152–166.
7. **Алешков, Ю. З.** Теория волн на поверхности тяжелой жидкости / Ю. З. Алешков. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 196 с.
8. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 1. – 584 с.
9. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

References

1. Elizarov A. M., Kirillin K. V., Filippov S. I. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskie nauki»* [Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences]. 2011, vol. 153, no. 1, pp. 147–154.

2. Sretenskiy L. N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [The theory of wave motion of fluid]. Moscow: Nauka, 1977, 816 p.
3. Khaskind M. D. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1945, vol. 9, no. 1, pp. 67–78.
4. Sturova I. V. *Chislennyye raschety v zadachakh generatsii ploskikh poverkhnostnykh voln* [Numerical calculations in problems of flat surface waves generation]. Krasnoyarsk, 1990, 48 p. (Preprint № 5 / VTs SO AN SSSR).
5. Terent'ev A. G., Afanas'ev K. E. *Chislennyye metody v gidrodinamike* [Numerical methods in hydrodynamics]. Cheboksary: Izd-vo Chuvashskogo gos. un-ta, 1987, 94 p.
6. Romate J. E. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1990, vol. 7, no. 4, pp. 152–166.
7. Aleshkov Yu. Z. *Teoriya voln na poverkhnosti tyazheloy zhidkosti* [The theory of waves on the gravity solution's surface]. Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta, 1981, 196 p.
8. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, part 1, 584 p.
9. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, orders and products]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p.

Басинский Константин Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математического
моделирования, Тюменский
государственный университет (Россия,
г. Тюмень, ул. Володарского, 6)

E-mail: kbasinsky@mail.ru

Basinskiy Konstantin Yur'evich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematical
modeling, Tyumen State University
(6 Volodarskogo street, Tyumen, Russia)

УДК 532.591

Басинский, К. Ю.

Образование волн на поверхности жидкости при обтекании кругового цилиндра / К. Ю. Басинский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 51–59. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-5

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМАХ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Увеличение сложности современных систем переработки, передачи и хранения информации выдвигает на первый план требование к надежности и контролю различных управляющих и вычислительных систем. Актуальной проблеме построения асимптотически оптимальных по надежности схем, реализующих булевы функции, при произвольных неисправностях элементов в базисе, состоящем из функции «антиконъюнкция», посвящена эта статья. Цель работы – получить ответы на вопросы: Можно ли произвольную булеву функцию реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой и какова ненадежность этой схемы?

Материалы и методы. В работе используются ранее известные методы синтеза надежных схем и получения оценок ненадежности схем.

Результаты. Доказано, что почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, получены верхняя и нижняя оценки ненадежности этой схемы. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Выводы. При произвольных неисправностях элементов в базисе, состоящем из функции «антиконъюнкция», возможна реализация почти любой булевой функции асимптотически оптимальной по надежности схемой.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность схемы, ненадежность схемы, неисправности на входах элементов.

М. А. Alekhina

ON CIRCUITS BEING ASYMPTOTICALLY OPTIMAL BY RELIABILITY IN CASES OF GATE FAILURES

Abstract.

Background. The increase of complexity of modern systems of data processing, transmission and storage emphasizes a requirement of safety and monitoring over various control and computing systems. The article is devoted to topical problems of formation of circuits, asymptotically optimal by reliability, that realize Boolean functions in cases of random gate failures in the basis consisting of the “anticonjunction” function. The aim of the work is to find answers to the following questions: Is it possible to realize an arbitrary Boolean function by a circuit with asymptotically optimal reliability and how unreliable is the said circuit?

Materials and methods. The study applied previously known methods of reliable circuit synthesis and circuit reliability estimation.

Results. It has been proved that virtually any Boolean function may be realized by a circuit with asymptotically optimal reliability. The article shows the upper and lower estimates of unreliability of the said circuit. The obtained results may be used in technical system design in order to increase their reliability.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00273.

Conclusions. In the case of random gate failures in the basis consisting of the “anticonjunction” function it is possible to realize virtually any Boolean function by a circuit with asymptotically optimal reliability.

Key words: unreliable functional gates, reliability of circuits, unreliability of circuits, failures on inputs of gates.

При построении тестов (проверочных или диагностических) [1–4], при синтезе самокорректирующихся схем или схем из ненадежных функциональных элементов [5–8] авторы, как правило, рассматривают неисправности одного конкретного типа (например, только константные неисправности типа 0). Ранее [9, 10] были предприняты попытки построения надежных схем из ненадежных элементов при наличии нескольких неисправностей разного типа (например, константные неисправности типа 0 и типа 1). В отличие от упомянутых работ, в этой статье рассматривается самый общий источник неисправностей [11, с. 480], когда базисный элемент с булевой функцией $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ в неисправном состоянии реализует любую булеву функцию $\varphi'(x_1, \dots, x_k)$, отличную от $\varphi(x_1, \dots, x_k)$. Для простоты изложения будем считать, что полный базис содержит только одну функцию. Например, функцию штрих Шеффера.

Итак, рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных элементов в полном базисе, состоящем из функции штрих Шеффера $\{x|y\}$ ($x|y = \overline{x \& y}$). Предположим, что базисный элемент наряду с исправным режимом функционирования (в котором он реализует функцию $f_1(x, y) = x|y$) имеет $2^{2^2} - 1 = 15$ неисправных режимов, в каждом из которых он реализует одну из функций двух переменных f_2, f_3, \dots, f_{16} , отличную от функции $x|y$. Пусть

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \overline{x \vee y}, \quad f_3(x, y) = x \& y, \quad f_4(x, y) = x \vee y, \quad f_5(x, y) = \overline{x} \vee y, \\ f_6(x, y) &= \overline{x} \& y, \quad f_7(x, y) = x \vee \overline{y}, \quad f_8(x, y) = x \& \overline{y}, \quad f_9(x, y) = x \oplus y, \\ f_{10}(x, y) &= x \sim y, \quad f_{11}(x, y) = 0, \quad f_{12}(x, y) = 1, \quad f_{13}(x, y) = x, \\ f_{14}(x, y) &= \overline{x}, \quad f_{15}(x, y) = y, \quad f_{16}(x, y) = \overline{y}. \end{aligned}$$

Обозначим вероятности появления этих функций через p_2, p_3, \dots, p_{16}

соответственно. Тогда $\varepsilon = \sum_{i=2}^{16} p_i$ – вероятность повреждения базисного элемента, $\bar{\varepsilon} = \min p_i$ ($i \in \{2, 3, \dots, 16\}$) – наименьшая из вероятностей исправного режима функционирования базисного элемента.

Для описанного источника неисправностей в книге [11, с. 480] приведен следующий результат: «При $\bar{\varepsilon} > 0$ произвольную булеву функцию нельзя реализовать схемой, ненадежность которой сколь угодно мала, ибо всегда ненадежность схемы больше ε ». Однако это утверждение при некоторых значениях вероятностей p_2, p_3, \dots, p_{16} неверно. Например, если $p_2 > 0$, а $p_i = 0$ при всех $i \in \{3, \dots, 16\}$, то $\varepsilon = p_2 = \bar{\varepsilon} > 0$, но (см. [8]) любую булеву

функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надежности. И этот результат согласуется с результатами работы [12].

Цель данного исследования – получить ответы на вопросы: Можно ли произвольную булеву функцию реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой и какова ненадежность этой схемы?

Функционирование базисного элемента можно описать с помощью табл. 1, в которой приведены вероятности ошибок базисного элемента в каждом из режимов функционирования.

Таблица 1

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	p_3	p_4	0	p_6	0	p_8	p_9	0	p_{11}	0	p_{13}	0	p_{15}	0
0	1	0	p_2	p_3	0	0	0	p_7	p_8	0	p_{10}	p_{11}	0	p_{13}	0	0	p_{16}
1	0	0	p_2	p_3	0	p_5	p_6	0	0	0	p_{10}	p_{11}	0	0	p_{14}	p_{15}	0
1	1	0	0	p_3	p_4	p_5	0	p_7	0	0	p_{10}	0	p_{12}	p_{13}	0	p_{15}	0

При вычислении вероятностей ошибок использовано следующее рассуждение: на двоичном наборе (a_1, a_2) вероятность ошибки для функции f_i равна 0, если $f_i(a_1, a_2) = a_1 | a_2$; если же $f_i(a_1, a_2) \neq a_1 | a_2$, то вероятность ошибки равна p_i .

Введем необходимые понятия и определения.

Считаем, что схема из ненадежных функциональных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагаем, что любой из элементов схемы независимо от других элементов переходит в неисправное состояние, в котором с вероятностью p_2 реализует функцию f_2 , с вероятностью p_3 реализует функцию f_3 и т.д., с вероятностью p_{16} реализует функцию f_{16} . Считаем также, что $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность по-

явления значения $f(\tilde{a}^n)$ на выходе схемы S при входном наборе \tilde{a}^n . *Ненадежность* $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ по всем входным наборам \tilde{a}^n схемы S , т.е.

$$P(S) = \max \left\{ P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n) \right\}. \text{ Надежность схемы } S \text{ равна } 1 - P(S).$$

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию f .

Схему A из ненадежных элементов, реализующую функцию f , назовем *асимптотически оптимальной по надежности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Учитывая вероятности ошибок, приведенные в табл. 1, вычислим вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E на каждом из четырех входных наборов:

$$P_0(E, (00)) = \sum_{i \in N_1} p_i, \quad P_0(E, (01)) = \sum_{i \in N_2} p_i,$$

$$P_0(E, (10)) = \sum_{i \in N_3} p_i, \quad P_1(E, (11)) = \sum_{i \in N_4} p_i,$$

где

$$N_1 = \{3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15\}, \quad N_2 = \{2, 3, 7, 8, 10, 11, 13, 16\},$$

$$N_3 = \{2, 3, 5, 6, 10, 11, 14, 15\}, \quad N_4 = \{3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15\}.$$

Обозначим вероятности ошибок на выходе базисного элемента $P_0(E, (00))$, $P_0(E, (01))$, $P_0(E, (10))$, $P_1(E, (11))$ через α , β , δ , τ соответственно, т.е. $\alpha = P_0(E, (00))$, $\beta = P_0(E, (01))$, $\delta = P_0(E, (10))$, $\tau = P_1(E, (11))$. Тогда ненадежность $P(E)$ элемента E равна $P(E) = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$. Нетрудно видеть, что $P(E) \leq \varepsilon$.

Чтобы получить нижнюю оценку ненадежности схем, рассмотрим специальный класс булевых функций.

Пусть $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, а $K(n)$ – множество булевых функций вида $f(\tilde{x}^n) = (\bar{x}_i \vee h(\tilde{x}^n))^a$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \{0, 1\}$.

Нетрудно проверить, что число функций в классе $K(n)$ не больше $2n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

$$\text{Пусть } K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n).$$

Справедлива теорема 1, доказательство которой такое же, как доказательство теоремы 7 из работы [10].

Теорема 1 [10]. Пусть функция $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f . Тогда при всех α и τ таких, что $2\alpha + \tau \leq 1/2$, верно неравенство

$$P(S) \geq (2\alpha + \tau)(1 - \tau)m^2,$$

где $m = \min\{1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \delta\}$.

Следствие 1. Если функция $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f , то ненадежность $P(S)$ схемы S асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не меньше, чем $2\alpha + \tau$.

Таким образом, получена нижняя оценка ненадежности схем. Чтобы получить верхнюю оценку ненадежности схем, покажем, как по исходной схеме, реализующей функцию f , строить новую схему, которая также реализует функцию f , но, возможно, с меньшей вероятностью ошибки на выходе схемы.

Пусть f – произвольная булева функция; S – схема, реализующая функцию f . Возьмем два экземпляра схемы S и базисный элемент E_1 . Соединим выходы схем со входами элемента E_1 . Построенную схему обозначим $\psi(S)$. Очевидно, что эта схема реализует функцию \bar{f} . Возьмем два экземпляра схемы $\psi(S)$ и новый базисный элемент E_2 . Соединим выходы схем $\psi(S)$ со входами базисного элемента E_2 . Построенную таким образом схему обозначим через $\Psi(S)$. Очевидно, что схема $\Psi(S)$ реализует исходную функцию f . Справедлива теорема 2.

Теорема 2 [13]. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f . Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \leq \max \left\{ 2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S), \right. \\ \left. \alpha + (\beta + \delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2 \right\},$$

где $P(S)$ – ненадежность схемы S .

Рассуждая так же, как в [10] при доказательстве теоремы 5, и учитывая, что $\alpha \leq 2\alpha$, $\tau(\beta + \delta + \tau) \leq \tau$ (поскольку $\beta + \delta + \tau \leq 3\epsilon \leq 1$ при $\epsilon \in (0, 1/160]$), нетрудно доказать теорему 3.

Теорема 3. В базисе $\{x | y\}$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B , что при всех $\epsilon \in (0, 1/160]$ верно неравенство

$$P(B) \leq 2\alpha + \tau + 70\epsilon^2.$$

Следствие 2. Любую булеву функцию можно реализовать такой схемой, что ее ненадежность асимптотически не больше, чем $2\alpha + \tau$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция. По теореме 3 функцию f можно реализовать такой схемой B , что при достаточно малых ϵ верно неравенство $P(B) \leq 2\alpha + \tau + 70\epsilon^2$. Возможны два варианта: либо $2\alpha + \tau + 70\epsilon^2 \sim 2\alpha + \tau$ (и тогда утверждение следствия верно), либо $2\alpha + \tau + 70\epsilon^2 \leq k_1\epsilon^2$ при некотором $k_1 > 70$. Остановимся подробнее на этом случае. По схеме B построим схему $\Psi(B)$ и, пользуясь теоремой 1, оценим ее ненадежность:

$$P(\Psi(B)) \leq \max \left\{ 2\alpha + \tau + 4\epsilon(k_1\epsilon^2) + 2(k_1\epsilon^2)^2, \right. \\ \left. \alpha + \tau(\beta + \delta + \tau) + 2(\beta + \delta + \tau)(k_1\epsilon^2) + 4(k_1\epsilon^2)^2 \right\}.$$

Поскольку

$$\alpha \leq 2\alpha, \quad \tau(\beta + \delta + \tau) \leq \tau, \quad \beta + \delta + \tau \leq 3\epsilon,$$

получаем неравенство

$$P(\Psi(B)) \leq 2\alpha + \tau + 6\varepsilon(k_1\varepsilon^2) + 4(k_1\varepsilon^2)^2 \leq 2\alpha + \tau + k_2\varepsilon^3$$

при некотором $k_2 > 6k_1$.

Снова имеем два варианта: либо $2\alpha + \tau + k_2\varepsilon^3 \sim 2\alpha + \tau$ (и тогда утверждение следствия верно), либо $2\alpha + \tau + k_2\varepsilon^3 \leq k_3\varepsilon^3$ при некотором k_3 . Повторяя предыдущие рассуждения, убедимся в справедливости следствия.

Следствие доказано.

Таким образом, получены следующие **результаты**:

1) любая схема, реализующая функцию $f \notin K$, функционирует с ненадежностью, которая асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не меньше, чем $2\alpha + \tau$, т.е. оценка ненадежности $2\alpha + \tau$ неснижаема;

2) любую булеву функцию можно реализовать схемой S , ненадежность которой асимптотически не больше $2\alpha + \tau$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следовательно, почти для любой функции f ($f \notin K$) схема S является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной $2\alpha + \tau$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В частности, если вероятности появления на выходе базисного элемента любой из функций f_2, f_3, \dots, f_{16} одинаковы, т.е. $p_2 = p_3 = \dots = p_{16} = p$, то $\alpha = 8p$, $\tau = 8p$. Поэтому при $p \rightarrow 0$ почти любую функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, ненадежность которой асимптотически равна $24p$.

Вывод: при произвольных неисправностях элементов в базисе, состоящем из функции «антиконъюнкция», возможна реализация почти любой булевой функции асимптотически оптимальной по надежности схемой.

Список литературы

1. **Романов, Д. С.** О диагностических тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях / Д. С. Романов // Прикладная математика и информатика. – 2010. – Т. 36. – С. 91.
2. **Romanov, D. S.** Diagnostic tests for local coalescences of variables in Boolean functions / D. S. Romanov // Computational Mathematics and Modeling. – 2012. – Т. 23. – С. 72–78.
3. **Морозов, Е. В.** Проверяющие тесты для булевых функций при линейных локальных неисправностях входов схем / Е. В. Морозов, Д. С. Романов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 49–61.
4. **Морозов, Е. В.** О проверяющих тестах относительно множественных линейных слипаний переменных / Е. В. Морозов, Д. С. Романов // Дискретная математика и ее приложения : материалы XI Междунар. семинара, посвящ. 80-летию со дня рожд. акад. О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). – М. : Изд-во механико-математического фак-та МГУ, 2012. – С. 144–147.
5. **Алехина, М. А.** О синтезе надежных схем из функциональных элементов $x|y$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Вестник Московского университета. Математика. Механика. – 1991. – № 5. – С. 80–83.

6. **Алехина, М. А.** О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 2. – С. 59–74.
7. **Алехина, М. А.** О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях элементов / М. А. Алехина // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. – 2005. – Т. 12. – С. 3–11.
8. **Алехина, М. А.** Ненадежность схем при слипаниях входов элементов / М. А. Алехина, О. А. Логвина // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2016. – № 9. – С. 98–100.
9. **Alekhina, M. A.** The Reliability of Circuits in the Basis Anticonjunction with Constant Faults of Gates / M. A. Alekhina, O. Yu. Barsukova // Computer Science and Information Technology. – 2014. – Vol. 2(1). – P. 51–54. DOI: 10.13189/csit.2014.020106.
10. **Алехина, М. А.** Синтез надежных схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 3–15.
11. Избранные труды С. В. Яблонского / отв. ред. В. Б. Алексеев, В. И. Дмитриев. – М. : МАКС Пресс, 2004.
12. **Тарасов, В. В.** К синтезу надежных схем из ненадежных элементов / В. В. Тарасов // Математические заметки. – 1976. – Т. 20, № 3. – С. 391–400.
13. **Алехина, М. А.** Синтез, сложность и надежность схем из ненадежных функциональных элементов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Алехина М. А. – Пенза, 2004.

References

1. Romanov D. S. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied mathematics and informatics]. 2010, vol. 36, p. 91.
2. Romanov D. S. *Computational Mathematics and Modeling*. 2012, vol. 23, pp. 72–78.
3. Morozov E. V., Romanov D. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2015, vol. 22, no. 1, pp. 49–61.
4. Morozov E. V., Romanov D. S. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya: materialy XI Mezhdunar. seminara, posvyashch. 80-letiyu so dnya rozhd. akad. O. B. Lupanova (Moskva, MGU, 18–23 iyunya 2012 g.)* [Discrete mathematics and its applications: proceedings of XI International seminar devoted to the 80th anniversary of academician O.B. Lupanov (Moscow, MSU, 18th – 23rd June 2012)]. Moscow: Izd-vo mekhaniko-matematicheskogo fak-ta MGU, 2012, pp. 144–147.
5. Alekhina M. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Mathematics. Mechanics]. 1991, no. 5, pp. 80–83.
6. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 2, pp. 59–74.
7. Alekhina M. A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 1* [Discrete analysis and research of operations. Series 1]. 2005, vol. 12, pp. 3–11.
8. Alekhina M. A., Logvina O. A. *Prikladnaya diskretnaya matematika. Prilozhenie* [Applied discrete mathematics. Applications]. 2016, no. 9, pp. 98–100.
9. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Computer Science and Information Technology*. 2014, vol 2(1), pp. 51–54. DOI: 10.13189/csit.2014.020106.
10. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 2 (34), pp. 3–15.
11. *Izbrannye trudy S. V. Yablonskogo* [Selected works of S. V. Yablonsky]. Execut. ed. V. B. Alekseev, V. I. Dmitriev. Moscow: MAKS Press, 2004.

12. Tarasov V. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical proceedings]. 1976, vol. 20, no. 3, pp. 391–400.
13. Alekhina M. A. *Sintez, slozhnost' i nadezhnost' skhem iz nenadezhnykh funktsional'nykh elementov: dis. d-ra fiz.-mat. nauk* [Synthesis, complexity and reliability of circuits consisting of unreliable functional gates: dissertation to apply for the degree of the doctor of physical and mathematical sciences]. Penza, 2004.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики, Пензенский
государственный технологический
университет (Россия, г. Пенза,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/1)

E-mail: ama@sura.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics, Penza State Technological
University (1a/1 Baydukova lane/Gagrina
street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Об асимптотически оптимальных по надежности схемах при неисправностях элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 60–67. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-6

НОРМАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ ЕВКЛИДОВЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Поверхности многомерных евклидовых пространств в настоящее время активно исследуются. Выделяются гиперповерхности и цилиндрические поверхности. Во многих случаях нужны векторы нормалей поверхности. Поверхность, описываемая несколькими явными скалярными функциями многих параметров, является пересечением цилиндрических поверхностей. Поэтому необходимы методы получения нормалей цилиндрических поверхностей.

Материалы и методы. Нормальные векторы цилиндрических поверхностей получаются как поливекторы и свойства цилиндрических поверхностей используются в исследовании поверхностей пересечения.

Результаты. Выписаны координаты нормальных векторов цилиндрических поверхностей. Установлено, что нормальные плоскости поверхностей порождаются нормальными векторами цилиндрических поверхностей. Для примера найдены координаты нормальных векторов поверхности Веронезе 8-мерного евклидова пространства, заданной пятью явными скалярными функциями. Приведена нормальная плоскость поверхности.

Выводы. Получены нормальные плоскости поверхностей многомерных евклидовых пространств.

Ключевые слова: многомерное евклидово пространство, поверхность, цилиндрическая поверхность, координаты векторов нормали, нормальная плоскость поверхности, метрическая форма поверхности, определяемость поверхности.

А. И. Dolgarev

NORMAL VECTORS OF EUCLIDEAN MULTIDIMENSIONAL SURFACES

Abstract.

Background. Surfaces of multidimensional Euclidean spaces are actively investigated nowadays. One distinguishes hypersurfaces and cylindrical surfaces. In many cases there is a need for vectors of surface normal. The surface, described by several explicit scalar functions of multiple parameters, is an intersection of cylindrical surfaces. Therefore, there is a need for methods to obtain normals of cylindrical surfaces.

Materials and methods. Normal vectors of cylindrical surfaces appear to be ad multivectos, and the properties of cylindrical surfaces are used in the study of intersection surfaces.

Results. The author obtained coordinates of normal vectors of cylindrical surfaces. It has been established that normal planes of surfaces are generated by normal vectors of cylindrical surfaces. Ad exemplum, the researcher found coordinates of normal vectors of the Veronese surface of the 8D Euclidean space, set by 5 scalar functions, and gave the surface's normal plane.

Conclusions. The author has obtained normal planes of surfaces of multidimensional Euclidean spaces.

Key words: multidimensional Euclidean space, surface, cylindrical surface, coordinates of normal vectors, normal plane surfaces, metric form of a surface, surface determinability.

Введение

В последнее время создана простая теория поверхностей многомерных евклидовых пространств [1–5], в которой поверхность представлена как пересечение цилиндрических гиперповерхностей, описываемых одной явной скалярной функцией, устанавливается определяемость поверхности метрическими формами цилиндрических поверхностей. Поверхности F^n евклидовых пространств E^m , $n < m$, описываемых k n -параметрическими функциями $z^c = z^c(x^1, \dots, x^n)$, $c = 1, \dots, k$, в каждой своей обыкновенной точке имеют k нормалей. Ниже указаны координаты векторов нормалей поверхности по заданным функциям z^c .

1. Первые вопросы теории поверхностей

1.1. Евклидово пространство

Пусть E^m – m -мерное, $m \geq 3$, евклидово пространство с векторным пространством V^m . Точками в E^m являются кортежи действительных чисел $x = (x^1, \dots, x^m)$, они обозначаются: A, \dots, M, \dots . Векторами в V^m являются кортежи $x = (x^1, \dots, x^m)$, над векторами производятся операции:

$$x + y = (x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n),$$

$$t(x^1, \dots, x^n) = (tx^1, \dots, tx^n), \quad t \in R.$$

В E^m выбран репер $B = (O, e_1, \dots, e_n)$. В векторном пространстве V^m определено евклидово скалярное произведение векторов x и y :

$$xy = x^1 y^1 + \dots + x^m y^m.$$

В случае xx имеем скалярный квадрат вектора $x^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$. Нормой, или длиной вектора x , называется неотрицательное число

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Векторы x, y называются перпендикулярными (ортогональными), $x \perp y$, если $xy = 0$. Векторы репера e_i считаются взаимно перпендикулярными и единичными, т.е. выбранный репер считается ортонормированным.

Паре точек (H, M) , $H = (h^1, \dots, h^m)$, $M = (x^1, \dots, x^m)$ ставится в соответствие вектор $HM = (x^1 - h^1, \dots, x^m - h^m)$.

Длина вектора $HM = (x^1 - h^1, \dots, x^n - h^n)$ равна

$$|HM| = \sqrt{(x^1 - h^1)^2 + \dots + (x^n - h^n)^2}$$

и является расстоянием между точками H, M в пространстве E^m .

Всякий вектор h пространства E^m вместе со всякой точкой P из E^m определяет в пространстве E^m прямую $\langle P, h \rangle$; которая есть 1-параметрическое множество точек

$$\langle P, h \rangle = \{M \mid PM = th, t \in R\};$$

k -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle$, $k < m$, пространства E^m , где h_1, \dots, h_k независимые векторы, есть k -параметрическое множество точек

$$\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle = \{M \mid PM = t^c h_c, t^c \in R, c = 1, \dots, k\}.$$

Если $k = m$, то m -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_m \rangle$ совпадает с пространством E^m .

1.2. Поверхности

Рассматривается n -параметрическое погружение

$$F^n : E^n \rightarrow E^m,$$

в котором точки $x = (x^1, \dots, x^n)$ пространства E^n отображаются на точки $u = (u^1, \dots, u^m)$ пространства E^m . Имеется m функций $u^j = u^j(x)$ n параметров x^i . Функции $u^j(x)$ являются q раз дифференцируемыми. Обозначим: $u_i^j = \partial u^j / \partial x^i$. Ранг матрицы (u_i^j) равен n . Тем самым имеется погружение $F^n : E^n \rightarrow E^m$ класса C^q . Обычно используется следующее

Определение. Поверхностью F^n пространства E^m , $n < m$, называется n -параметрическое погружение $F^n : E^n \rightarrow E^m$ класса C^q в паре с образом в погружении.

Поверхность F^n описывается k явными скалярными функциями n параметров $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, или векторной функцией

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m). \quad (1)$$

Если $k = 1$, то поверхность описывается одной явной скалярной функцией $z = z(x)$ или векторной функцией

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m). \quad (2)$$

Прямую $\langle P, h \rangle$, рассматриваемую в погружении $F^1 : E^1 \rightarrow E^{m-1}$, можно считать 1-параметрической поверхностью.

k -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle$, $k < m$, пространства E^m , h_1, \dots, h_k – независимые векторы, $h_c = (h_c^1, \dots, h_c^m)$, $c = 1, \dots, k$, описывается m скалярными явными функциями

$$z^c = h_1^c t^1 + \dots + h_k^c t^k + p^c$$

k параметров t^j , где $t = (t^1, \dots, t^k)$ – точка пространства E^k с векторным пространством $V^k = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$, натянутым на векторы h_1, \dots, h_k из V^m . k -плоскость $\langle P, h_1, \dots, h_k \rangle$ задается в отображении $F^k : E^k \rightarrow E^m$. Векторное описание k -плоскости:

$$r(t) = (t^1, \dots, t^k, z^1(t), \dots, z^m(t)).$$

k -плоскость является примером k -параметрической поверхности.

Предполагается, что образ в погружении не совпадает с пространством E^m , в которое производится погружение.

Величины x^i называются параметрами поверхности [2], величины u^j называются параметрами размерности, или свободными параметрами; свободные параметры u^j от параметров поверхности x^i не зависят. Векторы (1) и (2) называются параметризациями поверхности F^n . Для указания числа явных функций k , задающих поверхность F^n , также используется символ $F_{(k)}^n$; для указания размерности пространства, в котором лежит n -параметрическая поверхность F^n , будем писать $F_{(k)}^{n(m)}$. Параметризации (1), (2) поверхности F^n называются стандартными.

1.3. Гиперповерхности

Пусть в заданиях (1) и (2) выполняются соотношения: $m = n + k$, соответственно $m = n + 1$, задания поверхностей принимают вид

$$F^n = F_{(k)}^{n(m)} : r(x) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x)); \quad (3)$$

$$F^n = F_{(1)}^{(m)} : r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x)), \quad (4)$$

т.е. это параметризации поверхностей, не содержащие свободных параметров. Размерности векторов (3), (4) равны m . Тем самым заданы гиперповерхности пространства E^m . Параметризация (4) описывает гиперповерхность, заданную одной явной скалярной функцией, это поверхность-график; параметризация (3) описывает гиперповерхность, заданную k явными скалярными функциями. В частности, в 3-мерном пространстве E^3 все поверхности

$$F^2 : r(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \quad (5)$$

являются гиперповерхностями и все поверхности вида

$$F^1 : r(x) = (u(x), v(x), w) \quad (6)$$

являются гиперповерхностями, это поверхности размерности 2 в 3-мерном пространстве. В последнем случае в описании поверхности имеется один свободный параметр w . Параметризации (5)–(6) не являются стандартными.

1.4. Цилиндрические поверхности

Если $n + 1 < m$ в задании (2), то задание поверхности содержит свободные параметры и поверхность может описываться n -параметрической скалярной функцией $z = z(x)$, векторное задание поверхности F^n изменится по сравнению с (4) ввиду того, что пространство E^m m -мерно, и задание примет вид

$$F^n : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m), \quad (7)$$

как в (2). Всякий объект пространства E^m описывается m -мерным вектором. В частности, n -компонентный вектор $n < m$ с ненулевыми первыми n компонентами x^1, \dots, x^n описывается вектором $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$, последние $(m - n)$ компонент которого нулевые. Поверхность F^n (7) является цилиндрической [1] по аналогии с поверхностью F^1 одного параметра пространства E^3 , где выбран репер $B = (O, e_1, e_2, e_3)$, и поверхность задана векторной функцией вида

$$r(x, y) = (x, z(x), y), \quad (8)$$

здесь функция $z = z(x)$ одного параметра x , и от параметра y не зависит; y является свободным параметром. 1-параметрическая функция $z = z(x)$ задает в плоскости $\langle O, e_1, e_2 \rangle$ линию $z = z(x)$, называемую направляющей цилиндрической поверхности $(x, z(x), y)$, прямолинейные образующие этой поверхности есть $\langle O, e_3 \rangle$, это прямые, лежащие на поверхности (8). Плоскость прямолинейных образующих поверхности (8) 1-мерна.

Цилиндрическая поверхность (7) обладает направляющей поверхностью:

$$r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x), 0, \dots, 0),$$

вектор $r(x) = (x^1, \dots, x^n, z(x))$ содержится в подпространстве $\langle O, e_1, \dots, e_{n+1} \rangle$ пространства E^m ; прямолинейные образующие $\langle P, h \rangle$ поверхности (7) имеют своими векторами: $h = h^{n+2}e_{n+2} + \dots + h^m e_m$, где P – точка направляющей поверхности. Выполняется следующая теорема.

Теорема 1. Размерность плоскости прямолинейных образующих поверхности (7) равна числу свободных параметров и $l = m - n - 1$.

Плоскость прямолинейных образующих $\Pi^l = \langle P, e_{n+k+1}, \dots, e_m \rangle$ цилиндрической поверхности (7) лежит на поверхности. При $m > n + k$

имеем цилиндрическую поверхность (1), заданную k явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, ее направляющая поверхность есть: $r(x) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), 0, \dots, 0)$, лежит в $(n+k)$ -плоскости пространства E^m , прямолинейные образующие $\langle P, h \rangle$ определяются векторами $h = h^{n+k+1}e_{n+k+1} + \dots + h^m e_m$. Размерность плоскости прямолинейных образующих поверхности (1) равна $l = m - n - k$.

1.5. Поверхность как пересечение цилиндрических поверхностей

Пусть поверхность F^n описывается $k > 1$ функциями $z^c = z^c(x)$, см. (1):

$$F^n = F_c^{n(m)} : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m). \quad (9)$$

Каждая из функций $z^c = z^c(x)$ при $m > n + k$ (согласно разд. 1.4) в пространстве E^m задает цилиндрическую поверхность $F_c^n = F_{c(1)}^n$:

$$F_c^n : r^c(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, \dots, u^{n+c-1}, z^c(x), u^{n+c+1}, \dots, u^m). \quad (10)$$

Имеются следующие k цилиндрических поверхностей:

$$F_1^n : r^1(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), u^{n+2}, \dots, u^m),$$

$$F_2^n : r^2(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, z^2(x), u^{n+3}, \dots, u^m), \dots,$$

$$F_k^n : r^k(x, u) = (x^1, \dots, x^n, u^{n+1}, \dots, u^{n+k-1}, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m).$$

Размерность каждой из них равна $m-1$ [1]:

$$F^n = \bigcap_c F_c^n. \quad (11)$$

Теорема 2 [2, 3]. Поверхность F^n (11) n параметров пространства E^m , описываемая k скалярными функциями, $z^c(x)$ является пересечением (11) $F^n = \bigcap_c F_c^n$.

k цилиндрических поверхностей F_c^n , размерность каждой из которых равна $m-1$; $m = n + k + l$, число l есть размерность плоскости прямолинейных образующих цилиндрической поверхности F^n .

Действительно, точка P лежит на поверхности F^n , если и только если она лежит на каждой из поверхностей F_c^n .

Пример. Погружение $F^2 : E^2 \rightarrow E^3$ задано тремя функциями двух параметров:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y). \quad (12)$$

Можно описать это погружение в пространстве E^3 векторной функцией:

$$F_{(3)}^{2(3)} : r(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y)). \quad (13)$$

Здесь задано два параметра (x, y) и три функции двух параметров (12); тем самым задано пять компонент, поэтому отображение (12) в стандартной параметризации должно описываться в 5-мерном пространстве E^5 и 5-мерным вектором:

$$F_{(3)}^{2(5)} : r(x, y) = (x, y, u(x, y), v(x, y), w(x, y)). \quad (14)$$

В 3-мерном пространстве функции (12) описывают три цилиндрические поверхности:

$$F_{1(1)}^{2(3)} : r_{(1)}(x, y) = (u(x, y), x, y), \quad F_{2(1)}^{2(3)} : r_{(2)}(x, y) = (x, v(x, y), y),$$

$$F_{3(1)}^{2(3)} : r_{(3)}(x, y) = (x, y, w(x, y)),$$

В 5-мерном пространстве имеются цилиндрические поверхности, описываемые функциями (12) с использованием свободных параметров s^p , $p = 1, \dots, 5$ [4],

$$F_{1(1)}^{2(5)} : r^1(x, y, s) = (x, y, u(x, y), s^4, s^5),$$

$$F_{2(1)}^{2(3)} : r^2(x, y, s) = (x, y, s^3, v(x, y), s^5),$$

$$F_{3(1)}^{2(3)} : r^3(x, y, s) = (x, y, s^1, s^2, w(x, y)).$$

Выполняются соотношения:

$$F^{n(3)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(3)} \quad \text{и} \quad F^{n(5)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(5)}.$$

В частности, если в E^3 задана поверхность

$$F^{2(3)} : r(x, y) = (x^2 + y^2, xy, x^2 - y^2),$$

параметризация не стандартная, то в E^3 имеются поверхности:

$$F_{1(1)}^{2(3)} : r_{(1)}(x, y) = (x^2 + y^2, x, y), \quad F_{2(1)}^{2(3)} : r_{(2)}(x, y) = (x, xy, y),$$

$$F_{3(1)}^{2(3)} : r_{(2)}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2) \quad \text{и} \quad F_{(3)}^{2(3)} = \bigcap_c F_c^{2(3)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{2(3)}.$$

В E^5 задана поверхность в стандартной параметризации:

$$F_{(3)}^{2(5)} : r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2, xy, x^2 - y^2),$$

и цилиндрические поверхности:

$$F_1^{2(5)} : r^1(x, y, s) = (x, y, x^2 + y^2, s^4, s^5), F_2^{2(5)} : r^2(x, y, s) = (x, y, s^3, xy, s^5),$$

$$F_3^{2(5)} : r^3(x, y, s) = (x, y, x^2 - y^2, s^4, s^5), F^{n(5)} = \bigcap_c F_c^{n(5)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(5)}.$$

В работе [4] поверхность $F_{(3)}^{2(5)}$ получается по метрическим формам цилиндрических поверхностей $F_c^{2(5)}$. Однако поверхность (13) $F_{(3)}^{2(3)}$ может быть получена по метрическим формам поверхностей $F_{c(1)}^{2(3)}$.

1.6. Касательная плоскость поверхности

Вектор касательной к x^i -линии поверхности $r(x, u)$ обозначим $r_i = \partial r / \partial x^i$. Сначала рассмотрим поверхность $r(x, u)$, заданную одной явной скалярной функцией (7).

Векторы касательных x^i -линий:

$$r_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i, 0, \dots, 0), \quad z_i = \partial z / \partial x^i. \quad (15)$$

Компонента 1 вектора (15) имеет номер i , компонента z_i имеет номер $n+1$.

Если поверхность задана функцией (1), то вектор r_i касательной координатной x^i -линии таков:

$$r_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^1, \dots, z_i^k, 0, \dots, 0), \quad z_i^c = \partial z^c / \partial x^i. \quad (16)$$

Компонента 1 имеет номер i , компоненты z_i^c имеют соответственно номера $n+c$. Ниже, в разд. 1.7, предлагается специфическая запись компонент вектора.

Кроме указанных касательных векторов r_i координатных x^i -линий поверхности, цилиндрические поверхности имеют и касательные векторы другого вида. Цилиндрическая поверхность (8) 3-мерного пространства содержит прямолинейные образующие $\langle O, e_3 \rangle$, и вектор e_3 является касательным к поверхности (8) вдоль прямолинейной образующей. Цилиндрические поверхности (1) и (2) содержат прямолинейные образующие $\langle O, e_p \rangle$ с векторами e_p , $p = n+k+1, \dots, m$, соответственно $p = n+2, \dots, m$, при $k=1$. Векторы r_i и e_p независимы, порождают вместе с точкой H поверхности F^n касательную плоскость. Выполняется соотношение

$$m = n + k + l,$$

где l – число свободных параметров поверхности. Поверхность (1) имеет n касательных векторов r_i и $l = m - n - k$ свободных параметров, т.е. l касательных векторов e_p . Касательные плоскости поверхностей (1) и (2) порождаются $n + l$ независимыми касательными векторами r_i, e_l и таковы:

$$T_P F^n = \langle P, r_1, \dots, r_n, e_{n+k+1}, \dots, e_m \rangle. \quad (17)$$

Для поверхностей (3) и (4), не имеющих свободных параметров, касательные плоскости таковы:

$$T_P F^n = \langle P, r_1, \dots, r_n \rangle. \quad (18)$$

Теорема 3. Размерность касательной плоскости (17) поверхности (1) равна

$$n + l = n + (m - n - k) = m - k,$$

и поверхности (2) равна $m - 1$, т.е. равна размерности пространства без числа функций, задающих поверхность. Размерность плоскости (18), поверхности без свободных параметров равна n .

1.7. Специфическая форма записи компонент вектора

Как отмечено выше, например в записи вектора касательной (17) поверхности $x = (x^1, \dots, x^n)$, важно указать номер компоненты вектора, имеющей заданное значение. В соответствии с этим условимся при необходимости компоненты векторов записывать в виде дробей $\frac{r(t)}{t}$, где t есть номер компоненты вектора r , а $r(t)$ есть значение компоненты с номером t . Указанную запись векторов назовем специфической. При таком соглашении вектор r_i касательной

$$r_i = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^1, \dots, z_i^k, 0, \dots, 0 \right), \quad (19)$$

к поверхности $F_{(k)}^{n(m)}$, см. (1), имеет следующую специфическую запись:

$$r_i \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \frac{0}{n}, \frac{z_i^1}{n+1}, \dots, \frac{z_i^c}{n+c}, \dots, \frac{z_i^k}{n+k}, \frac{0}{n+k+1}, \dots, \frac{0}{m} \right), \quad (20)$$

а вектор касательной (7) имеет вид

$$r_i \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{0}{i-1}, \frac{1}{i}, \frac{0}{i+1}, \dots, \frac{0}{n}, \frac{z_i}{n+1}, \frac{0}{n+1}, \dots, \frac{0}{m} \right). \quad (21)$$

Для вычисления значений скалярных произведений $r_i r_j$ перемножаем компоненты векторов r_i и r_j с одинаковыми номерами и суммируем произведения; имеем:

$$r_i r_j \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{0}{i} + \frac{0}{j} \cdot \frac{1}{j} + \frac{z_i^c}{n+1} \cdot \frac{z_j}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + z_i \cdot z_j = z_i z_j, \quad (22)$$

$$r_i r_i \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i} + \frac{z_i}{n+1} \cdot \frac{z_i}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot 1 + z_i \cdot z_i = 1 + (z_i)^2. \quad (23)$$

Здесь проведено вычисление коэффициентов метрической формы поверхности (о метрической форме поверхности см. [2, 3]).

2. Нормальная плоскость поверхности

2.1. Нормаль поверхности заданной одной явной скалярной функцией

В 3-мерном пространстве разрешена задача получения вектора, перпендикулярного двум заданным векторам x и y , а именно: векторам x и y перпендикулярен вектор векторного произведения $[x, y]: [x, y] \perp x, y$. Если $x = (a, b, c)$ и $y = (f, g, h)$, то

$$[x, y] = (bh - cg, -(ah - cf), ag - bf).$$

Ставится задача: по координатам векторов касательных r_i поверхности $F^{n(m)}$ указать способ написания компонент векторов нормалей поверхности $F^{n(m)}$. Значения компонент векторов r_i позволяют разрешить задачу, см. [1].

Пусть поверхность описывается одной явной скалярной функцией $z = z(x)$ и, соответственно, векторной функцией (7):

$$F_{(1)}^n: r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m).$$

В векторном пространстве V^n евклидова пространства E^m рассматриваем векторы $r_{(p)ijl}$, которые могут иметь ненулевые значения только в компонентах с номерами i, j, l , причем $l = n + 1$, и p – номер вектора. Пусть

$$r_{(1)aijl} = (\dots, a, \dots, b, \dots, c, \dots), \quad r_{(2)aijl} = (\dots, f, \dots, g, \dots, h, \dots), \quad (24)$$

где

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = z_i, \quad f = 0, \quad g = 1, \quad h = z_j. \quad (25)$$

Тем самым векторы $r_{(p)ijl}$ являются векторами касательных координатных x^i -линий поверхности. Для векторов $r_{(1)ijl}$ и $r_{(2)ijl}$ зададим 2-вектор

$$r_{(1)ijl} \wedge r_{(2)ijl} = (\dots, bh - cg, \dots, -(ah - cf), \dots, ag - bf, \dots) \quad (26)$$

того же вида $r_{(p)ijl}$. При заданных значениях (25) компонент в (26) получается вектор

$$r_{(1)ijl} \wedge r_{(2)ijl} = v_{ij} = (\dots, -z_i, \dots, -z_j, \dots, 1, \dots). \quad (27)$$

Находим скалярные произведения векторов $r_{(1ijl)}$, $r_{(2ijl)}$ и v_{ij} , воспользовавшись специфической формой записи компонент векторов в разд. 1.7. Для векторов $r_{(1ijl)}$ и $r_{(2ijl)}$ со значениями компонент (25) имеем

$$r_{(1ijl)} \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \frac{0}{j}, \dots, \frac{z_i}{n+1}, \dots, \frac{0}{m} \right), \quad r_{(2ijl)} \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{0}{i}, \dots, \frac{1}{j}, \dots, \frac{z_j}{n+1}, \dots, \frac{0}{m} \right).$$

Вектор v_{ij} (27) имеет вид

$$v_{ij} \leftrightarrow \left(\dots, \frac{-z_i}{i}, \dots, \frac{-z_j}{j}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots \right).$$

Для скалярных произведений векторов получаем

$$r_{(1ijl)}v_{ij} \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_i}{i} + \frac{z_i}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_i) + z_i \cdot 1 = 0,$$

$$r_{(2ijl)}v_{ij} \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_j}{j} + \frac{z_j}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_j) + z_j \cdot 1 = 0,$$

что означает

$$r_{(1ijl)} \perp v_{ij}, \quad r_{(2ijl)} \perp v_{ij} = 0.$$

Находя по (26) последовательно векторы $v_{ijk} = v_{ij} \wedge r_k$ и т.д., получаем n -вектор:

$$r_1 \wedge \dots \wedge r_n = v_{1\dots n} = (-z_1, \dots, -z_n, 1, 0, \dots, 0). \quad (28)$$

Вычисляем скалярные произведения $r_i v_{1\dots n}$: записав согласно разд. 1.7

$$v_{1\dots n} \leftrightarrow \left(\frac{-z_1}{1}, \dots, \frac{-z_n}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{0}{n+2}, \dots, \frac{0}{m} \right),$$

находим

$$r_i v_{1\dots n} \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_i}{i} + \frac{z_i}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_i) + z_i \cdot 1 = 0 \text{ для всех } i.$$

Тем самым n -вектор $v_{1\dots n}$ перпендикулярен каждому из векторов касательных r_i к x^i -линиям поверхности. Перпендикулярен n -вектор $v_{1\dots n}$ и векторам прямолинейных образующих $\langle P, e_l \rangle$ поверхности. Выполняется

Теорема 4. Вектор нормали поверхности

$$r(x, u) = \left(x^1, \dots, x^n, z(x), u^{n+2}, \dots, u^m \right),$$

заданной одной скалярной функцией $z = z(x)$, имеет координаты (28):

$$v_{1\dots n} = (-z_1, \dots, -z_n, 1, 0, \dots, 0).$$

На основании теоремы 3 получаем следующую теорему.

Теорема 5. Во всякой обыкновенной точке поверхности, заданной одной явной скалярной функцией, существует единственная нормаль поверхности, определяемая вектором $v_{1\dots n}$.

Нормаль поверхности (7) есть

$$T_P^\perp F^n = \langle H, v_{1\dots n} \rangle.$$

2.2. Нормаль поверхности, заданной несколькими явными скалярными функциями

Пусть поверхность описывается k явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$, и, соответственно, векторной функцией (1):

$$F_{(k)}^{n(m)} : r(x, u) = (x^1, \dots, x^n, z^1(x), \dots, z^k(x), u^{n+k+1}, \dots, u^m).$$

В этом случае, по теореме 2, рассматриваемая поверхность $F^n = F_{(k)}^{n(m)}$ является пересечением k цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$:

$$F_{(k)}^{n(m)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(m)}.$$

Векторы касательных к x^i -линиям поверхности $F^n = F_{(k)}^{n(m)}$:

$$(2.2.1) \quad r_i = r_{i(k)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^1, \dots, z_i^c, \dots, z_i^k, 0, \dots, 0).$$

С использованием теоремы 5 выполняется

Теорема 6. Каждая из цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ имеет n векторов касательных r_i^c и единственный вектор нормали.

Векторы касательных поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ обозначаем r_i^c . Имеем

$$r_i^c = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, z_i^c, 0, \dots, 0).$$

Вектор нормали поверхности $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ обозначаем v^c . Согласно (28)

$$v^c = (-z_1^c, \dots, -z_i^c, \dots, -z_n^c, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

В специфической форме записи по разд. 1.7:

$$v^c \leftrightarrow \left(\frac{-z_1^c}{1}, \dots, \frac{-z_i^c}{i}, \dots, \frac{-z_n^c}{n}, \frac{0}{n+1}, \dots, \frac{0}{n+c-1}, \frac{1}{n+c}, \frac{0}{n+c+1}, \dots, \frac{0}{m} \right).$$

Так как $r_i^c \leftrightarrow \left(\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \frac{z_i}{n+c}, \dots, \frac{0}{m} \right)$, то выполняется равенство

$$r_i^c v^c = 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 7. Векторы нормалей v_c цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$ являются и векторами нормалей поверхности $F_{(k)}^{n(m)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(m)}$

пересечения этих цилиндрических поверхностей.

Вычисляем скалярные произведения $r_i v^c$ векторов r_i касательных x^i -линий поверхности $F^n = F_{(k)}^{n(m)}$ и векторов v^c нормалей цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$: для всех значений c и всех значений i :

$$r_i v^c \leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-z_i^c}{i} + \frac{z_i^c}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \leftrightarrow 1 \cdot (-z_i^c) + z_i^c \cdot 1 = 0.$$

Полученные значения и доказывают утверждение. #

Таким образом, выполняется

Теорема 8. Поверхность $F^n = \bigcap_c F_c^n$ в каждой своей обыкновенной

точке имеет k независимых нормалей v_c , совпадающих с нормальными поверхностями F_c^n .

Теперь справедлива следующая

Теорема 9. Нормальная плоскость поверхности $F_{(k)}^{n(m)} = \bigcap_c F_{c(1)}^{n(m)}$, за-

данной k явными скалярными функциями, такова:

$$T_H^\perp F^n = \langle H, v_1, \dots, v_k \rangle,$$

порождается в каждой обыкновенной точке H поверхности нормальными цилиндрических поверхностей $F_c^n = F_{c(1)}^{n(m)}$. Поверхность, заданная одной явной скалярной функцией, обладает единственной нормалью.

Действительно, по теореме 3: $\dim T_H F^n = m - k$, по теореме 9: $\dim T_H^\perp F^n = k$. Значит, сумма размерностей касательной плоскости и нормальной плоскости поверхности F^n в каждой обыкновенной точке равна

$$\dim T_H^\perp F^n + \dim T_H F^n = k + m - k = m,$$

т.е. равна размерности пространства E^m , в котором поверхность лежит; это соотношение верно для всякой поверхности. #

2.3. Сфера Веронезе

Классическая сфера Веронезе описана следующими функциями [5, с. 246]:

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} yz, \quad u^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} xz, \quad u^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} xy,$$

$$u^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \quad u^5 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2); \quad (29)$$

в погружении $F^3: E^3 \rightarrow E^5$. При этом сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ пространства E^3 отображается на гиперсферу пространства $E^5: \sum_j (u^j)^2 = 1$. Поверхность

F^3 3-параметрическая, в стандартной параметризации может быть описана в 8-мерном пространстве E^8 :

$$F_{(5)}^{3(8)}: r(x, y, z, u) = (x, y, z, u^1, \dots, u^5). \quad (30)$$

Векторы касательных:

$$r_x = (1, 0, 0, u_x^1, \dots, u_x^5), \quad r_y = (0, 1, 0, u_y^1, \dots, u_y^5), \quad r_z = (0, 0, 1, u_z^1, \dots, u_z^5).$$

Касательная плоскость $T_H F_{(5)}^{3(8)}$ поверхности $F_{(5)}^{3(8)}$ в произвольной точке H 3-мерна:

$$T_H F_{(5)}^{3(8)} = (H, r_x, r_y, r_z).$$

Функциями (29) в E^8 заданы цилиндрические поверхности:

$$F_1^{3(5)}: r_1(x, y, z, u, s) = r_1(x, y, z, u^2, s_2, s_8),$$

$$F_2^{3(5)}: r(x, y, z, u, s) = r(x, y, z, s_1, u^2, s_3, \dots, s_8), \dots,$$

$$F_5^{3(5)}: r(x, y, z, u, s) = r(x, y, z, s_1, \dots, s_4, u_5).$$

Векторы нормалей цилиндрических поверхностей $F_{c(1)}^{3(5)}$ в точке (x_0, y_0, z_0) по теореме 4, имеют следующие координаты:

$$c = 1. \quad v_1 = (0, -u_y^1, -u_z^1, 1, 0, 0, 0, 0) = \left(0, -\frac{z_0}{\sqrt{3}}, -\frac{y_0}{\sqrt{3}}, 1, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$c = 2. \quad v_2 = (-u_x^2, 0, -u_z^2, 0, 1, 0, 0, 0) = \left(-\frac{z_0}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{x_0}{\sqrt{3}}, 0, 1, 0, 0, 0\right),$$

$$c = 3. \quad v_3 = (-u_x^3, 0, -u_z^3, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = \left(-\frac{y_0}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{x_0}{\sqrt{3}}, 0, 0, 1, 0, 0\right),$$

$$c = 4. \quad v_4 = (-u_x^4, -u_z^4, 0, 0, 0, 0, 1, 0) = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{3}}, \frac{y_0}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0, 1, 0\right),$$

$$c = 5. \quad v_5 = \left(-u_x^5, -u_y^5, -u_z^5, 0, 0, 0, 0, 1 \right) = \left(-\frac{x_0}{3}, -\frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3}, 0, 0, 0, 0, 1 \right).$$

Это же и нормальные векторы поверхности (29), см. теорему 7. Имеем нормальную плоскость

$$T_H^\perp F_{(5)}^{3(8)} = (H, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5),$$

Размерность нормальной плоскости $T_H^\perp F_{(5)}^{3(8)}$ поверхности (29) сферы Веронезе равна 5.

Заключение

Выше указаны координаты векторов нормалей поверхностей многомерного евклидова пространства E^m , $m \geq 3$, описанных явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, $c = 1, \dots, k$. Тем самым указаны и нормальные плоскости поверхностей. Поверхности, описываемые k явными скалярными функциями $z^c = z^c(x)$, являются пересечением k цилиндрических поверхностей, описываемых каждой из функций $F_{(k)}^{3(m)}$. Размерность каждой из цилиндрических поверхностей равна $(m - 1)$. Для примера выписаны касательная плоскость классической сферы Веронезе [5, с. 246] и ее нормальная плоскость. Формы кривизны поверхности пересечения цилиндрических поверхностей совпадают с формами кривизны цилиндрических поверхностей. Коэффициенты форм кривизны цилиндрических поверхностей выражены через коэффициенты метрических форм цилиндрических поверхностей [1, 2]. Тем самым разрешен вопрос об определяемости поверхности метрическими формами цилиндрических поверхностей.

Список литературы

1. **Долгарев, А. И.** Многомерные поверхности I. Выражение коэффициентов второй квадратичной формы евклидовой поверхности через коэффициенты первой квадратичной формы / А. И. Долгарев // *Moderni vymozenosti vedy – 2014 : materialy X Miedzynarodowej naukowii-praktycznej konferencji, dil 34. Matematika. Fyzyka.* – Praga : Education and Skience. s.r.o., 2014. – С. 30–40.
2. **Долгарев, А. И.** Простая теория евклидовых поверхностей произвольной размерности / А. И. Долгарев // *Международный научный институт «EDUCATIO».* – 2014. – № 3, ч. 6. – С. 58–61.
3. **Долгарев, И. А.** Обзор простой теории поверхностей многомерных евклидовых пространств / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // *Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии : тр. XV Междунар. науч.-практ. конф. (22–23 мая, 2015, Новосибирск, Россия).* – Новосибирск, 2015. – С. 49–58.
4. **Долгарев, А. И.** Единая кривизна 2-мерной поверхности 5-мерного евклидова пространства / А. И. Долгарев // *Современные концепции научных исследований. Евразийский союз ученых : материалы V Междунар. науч.-практ. конф.* – М. : ЕСУ-С, 2014. – Ч. 5. – С. 26–29.
5. **Кривошапко, С. Н.** Энциклопедия аналитических поверхностей / С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов. – М. : ЛИБРОКОМ, 2010. – 360 с.

References

1. Dolgarev A. I. *Moderni vymozenosti vedy – 2014: materialy X Miedzynarodowej naukow-praktycznej konferencji, dil 34. Matematyka. Fizyka* [Modern advances in science – 2014: Proceedings of X International scientific and practical conference, Mathematics. Physics]. Praga: Education and Science. s.r.o., 2014, pp. 30–40.
2. Dolgarev A. I. *Mezhdunarodnyy nauchnyy institut «EDUCATIO»* [International Research Institute “EDUCATIO”]. 2014, no. 3, part 6, pp. 58–61.
3. Dolgarev I. A., Dolgarev A. I. *Aktual'nye voprosy razvitiya in-novatsionnoy deyatel'nosti v novom tysyacheletii: tr. XV Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (22–23 maya, 2015, Novosibirsk, Rossiya)* [Topical problems of innovative activity development in the new millennium: proceedings of XV International scientific and practical conference (22nd–23rd May 2015, Novosibirsk, Russia)]. Novosibirsk, 2015, pp. 49–58.
4. Dolgarev A. I. *Sovremennye kontseptsii nauchnykh issledovaniy. Evraziyskiy soyuz uchenykh: materialy V Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Modern conceptions of scientific research. the Eurasian Union of Scientists: proceedings of V International scientific and practical conference]. Moscow: ESU-S, 2014, part 5, pp. 26–29.
5. Krivoshepko S. N. *Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey* [Encyclopedia of analytical surfaces]. Moscow: LIBROKOM, 2010, 360 p.

Долгарев Артур Иванович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: deiivar@yandex.ru

Dolgarev Artur Ivanovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 514

Долгарев, А. И.

Нормальные векторы евклидовых многомерных поверхностей /
А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.
Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 68–83. DOI
10.21685/2072-3040-2016-4-7

УДК 51-71, 532.51, 538.93
DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-8

В. М. Журавлев

О МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЯМИ ЛАПЛАСА И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Рассматривается применение метода функциональных подстановок типа Коула – Хопфа к многомерным задачам динамики волн и гидромеханики. С помощью дополнительных преобразований строятся решения уравнения Лиувилля в двумерном координатном пространстве и анализируются отображения пространства решений этого уравнения в себя и в уравнение Лапласа.

Материалы и методы. Методом исследования рассматриваемых уравнений в данной работе является метод функциональных подстановок типа Коула – Хопфа. Данный метод позволяет, исходя из совокупности простых базовых дифференциальных соотношений относительно одной вспомогательной функции и дополнительного уравнения для нее, вычислять связанные с этим уравнением новые нелинейные уравнения, решения которых строятся в виде дифференциальных подстановок. Простейшим примером применения такого подхода является подстановка Коула – Хопфа для уравнения Бюргерса. Такой подход оказывается эффективным для целого ряда задач. В данной работе используется многомерное расширение метода функциональных подстановок, что позволяет получить ряд полезных результатов, касающихся динамики жидкости в трехмерном пространстве.

Результаты. Показано, что в двумерном пространстве существуют бесконечные рекуррентные цепочки преобразований уравнений Лапласа и Лиувилля в себя, связанные с возрастающим порядком производных одной исходной функции, являющейся решением уравнения Лапласа. С помощью подстановок и отображений вычисляется форма нелинейных уравнений, связанных также с уравнением Гельмгольца в двумерном координатном пространстве. Рассматриваемый подход затем применяется к многомерным уравнениям теплопроводности и устанавливается связь решений этих уравнений с решениями многомерных уравнений вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкости в классе потенциальных течений. Это позволяет указать способ вычисления точных решений уравнений Навье – Стокса на основе решений уравнений теплопроводности. В заключении рассматривается задача вычисления с помощью подстановок многомерных уравнений, связанных с уравнением теплопроводности и Лапласа. В работе показано, что такие уравнения можно свести к неоднородным уравнениям типа Лиувилля, неоднородность которых связана со свой-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015) и грантов РФФИ 16-42-732119 р_офи_м и 16-42-732113 р_офи_м.

ствами полей единичных векторов на соответствующем координатном пространстве.

Выводы. Развитый в работе многомерный вариант метода функциональных подстановок позволяет получить полезные для прикладных задач соотношения, связывающие решения простых уравнений типа Лапласа, теплопроводности и Гельмгольца с нелинейными уравнениями, имеющими отношение к волновой динамике и гидромеханике. Полученные результаты расширяют область применения метода функциональных подстановок к задачам теоретической и математической физики.

Ключевые слова: точно интегрируемые нелинейные уравнения, обобщенные подстановки Коула – Хопфа, многомерные уравнения Лапласа, Навье – Стокса, Лиувилля.

V. M. Zhuravlev

ON MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR EQUATIONS ASSOCIATED WITH LAPLACE AND HEAT CONDUCTION EQUATIONS BY MEANS OF FUNCTIONAL SUBSTITUTIONS

Abstract.

Background. The article considers the application of the method of functional substitutions of Cole-Hopf type to multidimensional problems of wave dynamics and hydromechanics. Using additional transformations, solutions to the Liouville equation are developed in a two-dimensional coordinate space while analyzing the selfmapping of the solution space and the mapping of the Laplace equation.

Materials and methods. A method of researching the equations under consideration is the method of functional substitutions of Cole-Hopf type. In terms of the aggregate of simple basic differential correlations of one auxiliary function and an additional equation for it, the given method enables to solve new nonlinear equations associated with the said equation, the solutions of which are developed in the form of differential substitutions. An elementary example of the given approach is a Cole-Hopf substitution for the Burgers equation. The given approach appears to be efficient for a series of problems. The present study uses multidimensional extension of the method of functional substitutions allowing to obtain a series of useful results concerning dynamics of liquid in 3D space.

Results. It is shown that in 2D space there exist infinite recurrent chains of self-transformations of Laplace and Liouville equations associated with an ascending order of derivatives of one initial function being a solution of the Laplace equation. The form of nonlinear equations associated as well with the Helmholtz equation in a 2D coordinate space is calculated using substitutions and mappings. Then, the approach under consideration is applied to multidimensional equations of heat conduction, and there is established a connection of solutions to the said equations with solutions of multidimensional equations for viscous compressible and incompressible fluids in the potential flow class. The above-said allows to specify a method for calculation of precise solutions of the Navier-Stokes equations on the basis of heat conduction equations' solutions. In conclusion, the article considers the problem of calculation using substitutions of multidimensional equations associated with Laplace and heat conduction equations. The work shows that such equations may be reduced to heterogeneous equations of Liouville type, the heterogeneity of which is associated with properties of unit vector fields in a corresponding coordinate space.

Conclusions. The multidimensional variant of the method of functional substitutions, developed in the work, makes it possible to obtain correlations useful for ap-

plied problems. Such correlations link solutions of simple equations of Laplace, heat conduction and Helmholtz types with nonlinear equations related to wave dynamics and hydromechanics. The results obtained expand the field of application of the method of functional substitutions for problems of the theoretical and mathematical physics.

Key words: exactly integrable nonlinear equations, generalized Hopf-Cole substitution, multi-dimensional Laplace equation, Navier-Stokes equations, Liouville equation.

Введение

В работах [1–4] был предложен метод, позволяющий строить уравнения типа Бюргерса и их решения с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа. Этот метод может быть применен к целому ряду прикладных задач, в частности, к задачам гидродинамики сжимаемой жидкости [2, 3], а также к задачам течений самогравитирующей среды [5, 6] и некоторым другим задачам [4].

Метод строится на основе анализа условий совместности некоторой базовой системы линейных уравнений. Однако, в отличие от метода обратной задачи, данный метод опирается не на сами условия совместности, а на дифференциальные следствия исходной системы уравнений. Как показано в [1–4], эту совокупность базовых дифференциальных соотношений всегда можно дополнить еще одним уравнением, замыкающим систему условий совместности до некоторого нелинейного уравнения типа Бюргерса. Свойства построенного таким образом уравнения типа Бюргерса определяются типом замыкающего уравнения. Например, полная интегрируемость построенного уравнения связана с интегрируемостью замыкающего уравнения, при этом последнее может и не быть линейным. Нелинейность замыкающего уравнения использовалась в работах [2, 3, 5, 6] для построения точных решений уравнений вязкой и идеальной сжимаемой жидкости.

В настоящей работе с помощью метода обобщенных подстановок Коула – Хопфа с новым набором базовых уравнений исследуются взаимосвязи решений уравнений Лапласа с решениями уравнений Навье – Стокса и уравнения Лиувилля в размерности 2. При этом вводятся различия между подстановками первого и второго уровня. Строится рекуррентная функциональная цепочка отображений решений уравнения Лапласа в решения того же уравнения Лапласа и Лиувилля, в том числе неоднородное уравнение Лиувилля. Показано, что существует бесконечно много таких отображений, отличающихся порядком производных, входящих в запись отображения. Далее в работе результаты применения подстановок первого и второго уровня переносятся на двумерное уравнение Гельмгольца, а затем и на многомерные уравнения теплопроводности, Лапласа и Гельмгольца.

1. Базовые соотношения первого порядка

Опираясь на результаты работ [1–4] в качестве исходной системы линейных уравнений, рассмотрим уравнения следующего вида:

$$T_x = AT, \quad T_t = BT, \quad (1)$$

относительно одной вспомогательной комплексной функции $T(x, t)$, двух вещественных переменных x и t и двух структурных комплексных функций $A(x, t)$ и $B(x, t)$. Дифференцируя однократно первое уравнение по t , а второе по x , получаем вместе с ними замкнутую однородную алгебраическую систему четырех уравнений относительно функции T и трех первых ее производных: T_x, T_t и T_{xt} . Условием совместности этой системы является структурное уравнение

$$A_t = B_x. \quad (2)$$

В силу этого все производные функции T можно выразить рекуррентно через функцию T или одну любую ее производную по формулам:

$$T^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k} T}{\partial x^n \partial t^k} = A^{[n,k]} T,$$

где

$$A^{[n+1,k]} = A_x^{[n,k]} + A^{[n,k]} A, \quad A^{[n,k+1]} = A_t^{[n,k]} + A^{[n,k]} B, \quad (3)$$

и

$$A^{[1,0]} = A, \quad A^{[0,1]} = B.$$

К базовой системе (1) можно добавить произвольное уравнение для T , которое в итоге с помощью соотношений (3) превращается в нелинейное уравнение, относительно функций A, B . При этом это уравнение образует замкнутую систему вместе с уравнением (2). В этом случае базовые соотношения (1) можно рассматривать как обобщенные подстановки Коула – Хопфа. Эти подстановки будем называть подстановками первого уровня.

2. Уравнение Лапласа и уравнения гидродинамики

Рассмотрим в качестве замыкающего уравнения для функции T уравнение Лапласа:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0. \quad (4)$$

Используя дифференциальные следствия соотношений (1), находим связь между функциями A и B :

$$A_x + A_y + A^2 + B^2 = 0, \quad A_y = B_x. \quad (5)$$

Система этих уравнений имеет точные решения, которые строятся с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа (1).

Наиболее простая интерпретация этих уравнений состоит в их связи со стационарными уравнениями Навье – Стокса двумерных потенциальных течений однородной и неоднородной жидкости. Полагая

$$v = -2\nu A = -2\nu \frac{T_x}{T}, \quad w = -2\nu B = -2\nu \frac{T_y}{T}, \quad (6)$$

где u, v – компоненты вектора скорости потока жидкости, и дифференцируя первое уравнение в (5) отдельно по x и y , а также используя второе, приходим к паре уравнений:

$$vv_x + ww_y = v\Delta v, \quad vw_x + ww_y = v\Delta w. \quad (7)$$

Это и есть стационарные уравнения Навье – Стокса с кинематической вязкостью ν . Для того чтобы в такой модели выполнялся закон сохранения массы, в качестве плотности среды ρ следует выбрать функцию $\rho = T(x, y)$. Действительно, в этом случае уравнение (4) можно записать в виде уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho v + \frac{\partial}{\partial y}\rho w = 0, \quad (8)$$

а уравнения (7) можно переписать так:

$$vv_x + ww_y = 2\nu \frac{1}{\rho} \nabla(\rho \nabla v), \quad vw_x + ww_y = 2\nu \frac{1}{\rho} \nabla(\rho \nabla w).$$

В этом случае кинематическая вязкость жидкости равна удвоенной исходной вязкости.

3. Подстановки второго уровня

Полученная интерпретация уравнений (5) оказывается не единственной. Эти уравнения обладают внутренней скрытой структурой второго уровня, которая выявляется лишь при специальном представлении функций A и B . Рассмотрим следующую замену переменных:

$$A = u(x, y) \cos \varphi(x, y), \quad B = u(x, y) \sin \varphi(x, y), \quad A^2 + B^2 = u^2. \quad (9)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (2) и (5), получаем

$$(u_x + u\varphi_y) \sin \varphi - (u_y - u\varphi_x) \cos \varphi = 0,$$

$$(u_x + u\varphi_y) \cos \varphi + (u_y - u\varphi_x) \sin \varphi + u^2 = 0.$$

Рассматривая эту систему как систему алгебраических уравнений относительно $p = u_x + u\varphi_y$ и $q = u_y - u\varphi_x$, находим их решение:

$$\theta_x + \varphi_y = -u \cos \varphi = -A, \quad (10)$$

$$\theta_y - \varphi_x = -u \sin \varphi = -B. \quad (11)$$

Здесь $\theta = \ln u$. Из этой системы перекрестным дифференцированием, используя (5), получаем следующие уравнения:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (12)$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = u^2 = e^{2\theta}. \quad (13)$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Лапласа, а второе – уравнение Лиувилля! Эти уравнения и отражают скрытую динамическую симметрию уравнений (5), которая заключается в наличии прямых обобщенных подстановок Коула – Хопфа для решений уравнений (12) и (13), связывающих их с решениями уравнения (4):

$$\theta = \ln u = \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{\partial \ln T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (14)$$

$$\varphi = \left(\frac{T_y}{T_x} \right). \quad (15)$$

Эти подстановки будем называть подстановками второго уровня.

Динамическая структура уравнений не исчерпывается подстановками (14) и (15), которые можно назвать простейшими. В класс таких простейших подстановок можно включить еще и подстановку, которая получается следующим образом. Представим функцию θ в следующем виде:

$$\theta = \psi - \ln T, \quad (16)$$

где

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left((T_x)^2 + (T_y)^2 \right). \quad (17)$$

Тогда, используя (4), находим

$$\Delta \theta - e^{2\theta} = \Delta \psi - \Delta \ln T - e^{2\theta} = \Delta \psi + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y} \right)^2 - e^{2\theta} = \Delta \psi = 0.$$

Здесь использовано тождество

$$\Delta \ln T = \frac{\Delta T}{T} - \left(\frac{T_x}{T} \right)^2 - \left(\frac{T_y}{T} \right)^2 = -e^{2\theta}.$$

В результате находим

$$\Delta \psi = 0. \quad (18)$$

Это позволяет рассматривать в качестве подстановки Коула – Хопфа и соотношение (17), которое связывает две гармонические функции T и ψ .

Утверждение 1. Обобщенная подстановка Коула – Хопфа (14) преобразует гармоническую функцию $T(x, y)$ в решение уравнения Лиувилля (13), а подстановки (15) и (17) преобразуют гармоническую функцию T в гармонические функции φ и ψ .

4. Рекуррентные цепочки подстановок

Совокупность простейших подстановок второго уровня (14)–(17) генерирует бесконечное множество более сложных подстановок, которые

можно получить, опираясь на тот факт, что функции φ и ψ являются гармоническими функциями, как и исходная функция T . Поэтому эти функции могут быть использованы в качестве источника тех же подстановок (14)–(17). Эту процедуру можно повторять неограниченное число раз. В результате мы получаем бесконечную цепочку преобразований решений уравнения Лапласа в новые решения уравнений Лапласа и уравнение Лиувилля, которые вычисляются рекуррентно по следующим правилам:

$$\theta^{(n+1)}[\eta] = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial \ln \eta^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \eta^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\varphi^{(n+1)}[\eta] = \left(\frac{\eta_y^{(n)}}{\eta_x^{(n)}} \right), \quad (19)$$

$$\psi^{(n+1)}[\eta] = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right], \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $\eta^{[n]}$ означает либо $\varphi^{[n]}$, либо $\psi^{[n]}$ в зависимости от выбора источника очередного шага рекуррентного процесса. В качестве начальных условий следует использовать любое решение уравнение Лапласа:

$$\varphi^{(0)} = \psi^{(0)} = T, \quad \varphi^{(1)} = \varphi, \quad \theta^{(1)} = \theta, \quad \psi^{(1)} = \psi,$$

в частности, функции

$$\theta^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (20)$$

$$\varphi^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x} \right), \quad \psi^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (21)$$

вновь являются решениями уравнения Лиувилля ($\theta^{(2)}[\varphi]$) и Лапласа ($\varphi^{(2)}[\varphi]$, $\psi^{(2)}[\varphi]$) соответственно; аналогично:

$$\theta^{(2)}[\psi] = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (22)$$

$$\varphi^{(2)}[\psi] = \left(\frac{\psi_y}{\psi_x} \right), \quad \psi^{(2)}[\psi] = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (23)$$

также являются решениями уравнения Лиувилля ($\theta^{(2)}[\psi]$) и Лапласа ($\varphi^{(2)}[\psi], \psi^{(2)}[\psi]$). Общими свойствами функции для каждого шага рекуррентного процесса являются следующие соотношения:

$$\theta^{(n+1)}[\eta] = \psi^{(n+1)}[\eta] - \ln \varphi^{(n)}[\eta], \quad \Delta \ln \eta^{(n)} = -e^{2\theta^{(n+1)}[\eta]}. \quad (24)$$

Степень сложности каждого элемента рассматриваемой цепочки отображений возрастает с номером шага рекуррентного процесса и определяется тем, как функции на этом шаге связаны с начальной функцией T этого процесса. В частности, на втором шаге рекуррентного процесса функции $\varphi^{(2)}, \psi^{(2)}, \theta^{(2)}$ связаны с T следующим образом:

$$\varphi^{(2)}[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi_y \\ \varphi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{yy}T_x - T_{xy}T_y \\ T_{yx}T_x - T_{xx}T_y \end{pmatrix},$$

$$\psi^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \ln \left[(T_{yy}T_x - T_{xy}T_y)^2 + (T_{yx}T_x - T_{xx}T_y)^2 \right] - \ln \left[(T_x)^2 + (T_y)^2 \right],$$

$$\theta^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \ln \left[(T_{yy}T_x - T_{xy}T_y)^2 + (T_{yx}T_x - T_{xx}T_y)^2 \right] - \ln \left[(T_x)^2 + (T_y)^2 \right] - \ln \left(\frac{T_y}{T_x} \right).$$

В результате имеем следующее утверждение.

Утверждение 2. Для каждого шага n цепочки преобразований (19) функции $\varphi^{(n)}[\eta], \psi^{(n)}[\eta]$ и $\theta^{(n)}[\eta]$ при любом выборе гармонической функции-источника η эти функции являются решениями уравнений Лапласа и Лиувилля соответственно. Сами эти функции выражаются через производных функции T порядка не выше n .

Заметим, что в связи с существованием рекуррентных цепочек преобразований (19) представляет интерес анализ условий, при которых в результате конечного числа шагов достигается исходная гармоническая функция. Важным здесь является то, что при выполнении таких условий гармонические функции будут являться решениями некоторых нелинейных уравнений. Для случая бесконечного числа шагов рекуррентного процесса интерес представляет ответ на вопрос о существовании предельных гармонических функций, к которым стремятся соответствующие функции $\varphi^{[n]}, \psi^{[n]}$ при $n \rightarrow \infty$.

5. Неоднородное уравнение Лиувилля

Построенные решения позволяют получить в обобщенной форме результаты, которые ранее были получены в работах [7, 8]. Рассмотрим функцию $\chi = \theta + \alpha \ln T$. Используя свойства функций θ и T , находим, что функция χ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Delta \chi = \Delta \theta + \alpha \Delta \ln T = e^{2\theta} - \alpha e^{2\theta} = (1 - \alpha) e^{\chi - \alpha \ln T} = (1 - \alpha) T^{-2\alpha} e^{2\chi},$$

отсюда следует, что функция χ удовлетворяет неоднородному уравнению Лиувилля

$$\Delta\chi = (1 - \alpha)T^{-2\alpha}e^\chi,$$

в котором функция T является гармонической функцией. Этот результат можно обобщить, если воспользоваться соотношениями (24). Для каждого шага цепочки рассмотрим функцию

$$\chi^{(n+1)}[\eta] = \theta^{(n+1)}[\eta] + \alpha \ln \eta^{(n)}.$$

Тогда, используя (24), прямыми вычислениями находим, что функция $\chi^{(n+1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\chi^{(n+1)}[\eta] = (1 - \alpha)[\eta^{(n)}]^{-2\alpha} e^{2\chi^{(n+1)}[\eta]},$$

в частности

$$\Delta\chi_1^{(2)} = (1 - \alpha) \left(\left(\frac{T_y}{T_x} \right) \right)^{-2\alpha} e^{2\chi_1^{(2)}}, \quad \Delta\chi_2^{(2)} = (1 - \alpha) \left(\ln \left((T_x)^2 + (T_y)^2 \right) \right)^{-2\alpha} e^{2\chi_2^{(2)}}.$$

При $\alpha = -1/2$ в правую часть неоднородного уравнения Лиувилля в качестве неоднородного множителя входит соответствующая гармоническая функция, что фактически эквивалентно нелинейному автономному уравнению следующего вида:

$$\Delta \left[e^{-2\chi^{(n)}} \Delta\chi^{(n)} \right] = 0.$$

Этот результат имеет следующее обобщение. Воспользуемся тождеством

$$\Delta F(T) = F'(T)\Delta T + F''((T_x)^2 + (T_y)^2) = T^2 F''(T)e^{2\theta}, \quad (25)$$

которое выполняется для любой гармонической функции T .

Рассмотрим функцию

$$\xi = \theta + F(T).$$

Тогда, используя тождество (25), получаем

$$\Delta\xi = e^{2\xi}(1 + T^2 F''(T))e^{-2F(T)}.$$

Аналогичное преобразование можно построить для каждого шага цепочки (19).

Утверждение 3. Для каждого шага n цепочки (19) функция

$$\xi^{(n)}[\eta] = \theta^{(n)}[\eta] + F(\eta) \quad (26)$$

удовлетворяет неоднородному уравнению Лиувилля:

$$\Delta\xi^{(n)}[\eta] = e^{2\xi^{(n)}[\eta]}(1 + \eta^2 F''(\eta))e^{-2F(\eta)}.$$

Следствие. В случае, если функция $F(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$(1 + \eta^2 F''(\eta)) e^{-2F(\eta)} = C,$$

где C – отличная от нуля постоянная, соотношение (26) является преобразованием решений уравнений Лиувилля в себя, а в случае $C = 0$ – преобразованием решений уравнения Лиувилля в уравнение Лапласа.

6. Подстановки, связанные с уравнением Гельмгольца

Найденная богатая структура преобразований уравнений Лапласа в себя и в уравнение Лиувилля, связанная с подстановками второго уровня, в отличие от подстановок первого уровня, которые приводят к уравнениями Навье – Стокса, не воспроизводится для других уравнений даже при незначительных усложнениях их структуры по сравнению со структурой уравнения Лапласа. Рассмотрим в качестве такого обобщения замыкающее уравнение Гельмгольца:

$$T_{xx} + T_{yy} = \gamma^2 T, \quad (27)$$

где γ – постоянная.

Замыкающее уравнение в виде коэффициентов A, B теперь будет иметь вид

$$A_x + B_x + A^2 + B^2 = \gamma^2.$$

Нетрудно проверить, что появление постоянной величины γ^2 в правой части уравнения (27) не меняет структуру уравнений (7) при использовании тех же обозначений (6). Однако, в отличие от случая уравнения Лапласа, уравнение (27) невозможно простым образом представить в виде закона сохранения, эквивалентного по форме уравнению неразрывности (8). Возможно, именно это предопределяет отсутствие простой внутренней структуры уравнений для функций A, B в этом случае.

По аналогии с предыдущим случаем ищем решение для A, B в том же виде (9). В этом случае имеем

$$(u_x + u\varphi_y) \sin \varphi - (u_y - u\varphi_x) \cos \varphi = 0,$$

$$(u_x + u\varphi_y) \cos \varphi + (u_y - u\varphi_x) \sin \varphi + u^2 - \gamma^2 = 0.$$

Полагая

$$u_x + u\varphi_y = R^2 \cos \varphi, \quad u_y - u\varphi_x = R^2 \sin \varphi, \quad (28)$$

приходим к следующему соотношению:

$$R^2 + u^2 = \gamma^2.$$

Отсюда следует, что существует такая функция χ , что

$$R = \gamma \cos \chi, \quad u = \gamma \sin \chi.$$

Это означает, что вещественные решения для u и R , соответствующие (9), являются ограниченными: $|R| < \gamma$, $|u| < \gamma$.

Исключая из (28) функцию R , находим

$$\frac{1}{u}u_x + \varphi_y = -\left(u - \frac{\gamma^2}{u}\right)\cos\varphi, \quad \frac{1}{u}u_y - \varphi_x = -\left(u - \frac{\gamma^2}{u}\right)\sin\varphi. \quad (29)$$

Производя дифференцирование соотношений (29) и некоторые дополнительные преобразования, получаем

$$\Delta\theta - e^{2\theta} + \gamma^4 e^{-2\theta} = -2\gamma^2 e^{-\theta} (\varphi_x \sin\varphi - \varphi_y \cos\varphi), \quad (30)$$

$$\Delta\varphi = -2\gamma^2 e^{-\theta} (\varphi_y \sin\varphi + \varphi_x \cos\varphi). \quad (31)$$

Здесь, как и раньше, $\theta = \ln u$. Из (29) можно получить еще одно относительно простое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 \varphi_x}{u^2 - \gamma^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 \varphi_y}{u^2 - \gamma^2} \right) = 0.$$

Уравнение (31) позволяет разделить переменные:

$$\theta = \ln(2\gamma^2) + \ln(-\varphi_y \sin\varphi - \varphi_x \cos\varphi) - \ln \Delta\varphi.$$

Подставляя это соотношение в (30) и исключая из него θ , приходим к одному уравнению для φ , которое имеет очень громоздкий вид. Таким образом, подстановки второго уровня, хотя и существуют для уравнения Гельмгольца, но не содержат столь же богатого многообразия структур, как в случае с уравнением Лапласа.

Заметим, что (30) имеет вид неоднородного уравнения Синус – Гордон (SG). Однородное уравнение SG интегрируется методом обратной задачи [9]. Поэтому возникает вопрос о возможности получать решения уравнения SG с помощью некоторых дополнительных условий на выбор решений исходного уравнения Гельмгольца. Однако анализ таких условий выходит за рамки данной работы.

7. Многомерные системы

Предложенный подход можно распространить достаточно просто и на многомерные системы, связанные с уравнениями Лапласа, Д'Аламбера и теплопроводности. Поскольку, как и выше, все результаты, касающиеся уравнений, связанных с уравнением Лапласа, легко переносятся на случай уравнения Д'Аламбера, то мы не будем специально выписывать их в данной работе. Рассмотрим применение данного метода сразу в размерности $n + 1$. В этом случае базовая система уравнений имеет следующий вид:

$$T_t = WT, \quad T_{,\alpha} = A_{\alpha}T, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (32)$$

Эта система представляет собой подстановки первого уровня в многомерном случае. Здесь и далее используются обозначения:

$$F_{,\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}, \quad F_{,t} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Условиями совместности этой системы являются соотношения:

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}, \quad W_{,\alpha} = A_{\alpha,t}. \quad (33)$$

В качестве замыкающего уравнения рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$T_t = \nu \Delta T, \quad (34)$$

здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}.$$

Это уравнение эквивалентно следующему замыкающему соотношению:

$$\frac{1}{\nu} W = \sum_{\alpha=1}^n (A_{\alpha,\alpha} + A_\alpha^2). \quad (35)$$

Из последнего соотношения простым дифференцированием находим

$$W_{,\alpha} = A_{\alpha,t} = \nu \sum_{\beta=1}^n (A_{\beta,\alpha} + 2A_\alpha A_{\alpha,\beta}).$$

Используя условия совместности, из этого соотношения для каждого значения индекса β получаем

$$\frac{1}{\nu} A_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^n (A_{\alpha,\beta\beta} + 2A_\alpha A_{\beta,\alpha}). \quad (36)$$

Если ввести обозначения $v_\alpha = -2\nu A_\alpha$, то последнее уравнение приводится к уравнению Навье – Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ и нулевой силой Архимеда:

$$v_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^n v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta v_\alpha.$$

Это уравнение можно назвать многомерным уравнением Бюргерса.

Вводя обозначения $u_\alpha = -\nu A_\alpha$, уравнение (36) приводим к следующему виду:

$$u_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^n u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta u_\alpha - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \quad (37)$$

где

$$p = \frac{\nu}{2} \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}^2 + p_0, \quad (38)$$

здесь p_0 – произвольная постоянная.

Уравнение (37) интерпретируется как уравнения Навье – Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $u = \nu/2$ и давлением p . Однако для полноты такой интерпретации необходимо указать уравнение сохранения массы, которое должно иметь вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \rho u^{\alpha} = 0. \quad (39)$$

К такому виду приводится исходное уравнение (34). Действительно,

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nu \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[T \frac{\partial \ln T}{\partial x_{\alpha}} \right] = 0.$$

Используя обозначения для скорости и полагая $\rho = T$, приходим к уравнению (39). Таким образом, любое решение уравнения (34) дает решение уравнений Навье – Стокса с давлением p и плотностью ρ , однако требуется определенное уточнение этих уравнений.

Поскольку в систему уравнений включена непостоянная плотность среды, то это требует определенного пересмотра уравнения Навье – Стокса. В реальности в запись правой части уравнения (37) при непостоянной плотности среды должен входить множитель ρ^{-1} . Это означает, что уравнение (37) необходимо модифицировать. Это можно сделать, учитывая тот факт, что в запись слагаемого, ответственного за вязкую диссипацию в уравнении (37), входит динамическая вязкость, пропорциональная плотности жидкости, которая в нашем случае $\rho = T$. Следовательно, это слагаемое должно иметь следующий вид:

$$F_{\alpha}^{(\nu)} = \frac{\nu}{\rho} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\rho \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right] = -\frac{\nu^2}{T} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[T \frac{\partial^2 \ln T}{\partial x_{\beta} \partial x_{\alpha}} \right] = -\sum_{\beta=1}^n \mu_{\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \nu \sum_{\beta=1}^n \left[\frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2} \right].$$

Уравнение (37) теперь можно переписать следующим образом:

$$u_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^n \mu_{\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\nu}{\rho} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\rho \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right]. \quad (40)$$

Это уравнение не содержит силы Архимеда (градиента давления), т.е. относится к динамике жидкости с постоянным по пространству давлением.

Отметим, что если в качестве исходного уравнения в размерности n использовать уравнение Лапласа (Д’Аламбера), то совершенно аналогичные выкладки приводят к стационарному уравнению Навье – Стокса для потенциальных течений. Поэтому специально эти результаты здесь не приводятся.

8. Уравнение переноса тепла

Единственным недостатком полученного решения является неясность с уравнением состояния $p = p(\rho, \Theta)$ для полученного класса решений. Здесь Θ – температура жидкости (газа). Температура системы должна удовлетворять уравнению теплопроводности. Для получения такого уравнения продифференцируем уравнение (35) по t и воспользуемся соотношениями совместности (2). В результате имеем

$$\frac{1}{v} W_t = \sum_{\beta=1}^n (A_{\beta,\beta,t} + 2A_{\beta} A_{\beta,t}) = \sum_{\beta=1}^n (W_{,\beta,\beta} + 2A_{\beta} W_{,\beta}).$$

Если положить, что температура Θ среды связана с W соотношением

$$\Theta = \gamma W + \Theta_0 = \gamma \frac{\partial \ln T}{\partial t} + \Theta_0,$$

то приходим к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{\alpha}} = v \Delta \Theta + \gamma \frac{\partial p}{\partial t}$$

с источником, равным $\gamma \dot{p}$.

Это же уравнение можно записать в форме уравнения без источника:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{\alpha}} = \frac{v}{\rho} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\rho \frac{\partial \Theta}{\partial x_{\beta}} \right]. \quad (41)$$

9. Подстановки второго уровня в многомерном случае

В связи с тем, что для уравнения Лапласа в размерности $n = 2$ существуют подстановки второго уровня, преобразующих гармонические функции в гармонические и в решения уравнения Лиувилля, интерес представляет проверка существования аналогичных подстановок второго уровня в многомерном случае, в том числе и для уравнения теплопроводности. Для того чтобы получить аналог соотношений внутренней структуры в размерности $n+1$, рассмотрим следующее представление функций A_{α} :

$$A_{\alpha} = u(x, t) N_{\alpha}(x, t), \quad (42)$$

где векторное поле $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ имеет везде длину, равную 1:

$$\sum_{\alpha}^n N_{\alpha}^2 = 1.$$

В результате имеем

$$\sum_{\alpha}^n A_{\alpha}^2 = u^2.$$

Введем обозначение

$$\theta_\alpha = \frac{\partial \ln u}{\partial x_\alpha}, \quad \theta = \ln u.$$

Тогда уравнение (35) и совокупность условий совместности (33) приводят к следующей системе соотношений:

$$\theta_\alpha N_\beta - \theta_\beta N_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial W}{\partial x_\alpha} = u_t N_\alpha + u \frac{\partial N_\alpha}{\partial t},$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \theta_\alpha N_\alpha + \operatorname{div} N + u - \frac{W}{vu} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

Умножая первое из этих соотношений на N_β и сворачивая результат по индексу β , находим

$$N_\alpha \left(u + \operatorname{div} N - \frac{1}{v} W e^{-\theta} \right) + \theta_\alpha = \sum_{\beta=1}^n N_\beta \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (43)$$

Здесь и далее

$$\operatorname{div} N = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Беря дивергенцию от соотношения (43), приходим к следующему уравнению для θ :

$$\Delta \theta - e^{2\theta} - \theta_t + \frac{1}{v^2} W^2 e^{-2\theta} - \frac{2}{v} W e^{-\theta} \operatorname{div} N = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - [\operatorname{div} N]^2. \quad (44)$$

Это уравнение можно рассматривать как неоднородное нелинейное уравнение теплопроводности.

Из полученных соотношений можно получить соответствующие уравнения для случая, когда исходным уравнением является уравнение Лапласа. Для этого необходимо в уравнениях положить $W = \operatorname{const}$ и потребовать независимость функций от t . В этом случае уравнение (44) переходит в неоднородное многомерное уравнение SG:

$$\Delta \theta - e^{2\theta} + \frac{1}{v^2} W^2 e^{-2\theta} - \frac{2}{v} W e^{-\theta} \operatorname{div} N = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial N_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_\beta} - [\operatorname{div} N]^2. \quad (45)$$

Из анализа этих уравнений следует, что в решениях многомерных уравнений Лапласа, теплопроводности и Гельмгольца отсутствует столь же богатая совокупность подстановок второго уровня, которая наблюдается в случае замыкающего уравнения в форме двумерного уравнения Лапласа (Д'Аламбера). Однако универсальность неоднородной части полученных уравнений позволяет поставить общий вопрос о существовании условий, при

которых соответствующие неоднородные уравнения Лиувилля, теплопроводности и SG сводятся к однородным.

Отметим, что из полученных соотношений можно получить соответствующие уравнения для случая, когда исходным уравнением является уравнение Лапласа. Для этого необходимо в уравнениях положить $W = 0$ и опять потребовать независимость функций от t . В этом случае уравнение (44) примет более простой вид:

$$\Delta\theta - e^{2\theta} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - [\operatorname{div} N]^2. \quad (46)$$

Это уравнение имеет форму неоднородного многомерного уравнения Лиувилля.

В работах [10–12] были рассмотрены методы построения точных решений уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. Уравнение (46) в сочетании с информацией, полученной в работах [10–12], дает дополнительную информацию о некоторых свойствах полей единичной длины на многомерных пространствах. Действительно, пусть функция θ удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\Delta\theta - e^{2\theta} = 0.$$

Отсюда следует, что единичные поля N , заданные соотношениями

$$N_{\alpha} = A_{\alpha} e^{-\theta} = \frac{T_{\alpha}}{T} e^{-\theta},$$

где T удовлетворяет уравнению Лапласа, удовлетворяют уравнению

$$(\operatorname{div} N)^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}.$$

Этот дополнительный результат требует отдельного анализа, поскольку может оказаться полезным в различных прикладных задачах.

Заключение

В работе на основе метода функциональных подстановок типа Коула – Хопфа выведены нелинейные уравнения, связанные с замыкающими уравнениями в форме Лапласа (Д'Аламбера), теплопроводности и Гельмгольца. Эти нелинейные уравнения имеют вид уравнений потенциальных течений вязкой идеальной сжимаемой жидкости, что обобщает результат Коула – Хопфа в отношении одномерного уравнения Бюргерса. Этот результат получен в данной работе для произвольной размерности координатного пространства. Важным обстоятельством, найденным в работе, является наличие дополнительной функциональной структуры решений, которая выражается в наличии универсального представления полученных нелинейных уравнений в форме неоднородных уравнений Лиувилля, теплопроводности и уравнения SG. Наиболее существенным результатом в отношении дополнительной функциональной структуры является наличие бесконечных рекуррентных цепочек

отображений двумерных гармонических функций в другие гармонические функции и решения двумерного уравнения Лиувилля. Наличие бесконечного многообразия подстановок типа Коула – Хопфа для двумерного уравнения Лапласа (или Д'Аламбера) выделяет это уравнение среди других типов уравнений. Как показано в работе, такой структурой не обладают решения уравнений теплопроводности, Гельмгольца и уравнения Лапласа в размерностях больших 2. Однако из универсальности формы нелинейных уравнений в размерности $n > 2$ можно предположить, что, возможно, существуют условия, при которых можно в явном виде получать решения многомерных уравнений Лиувилля или SG.

Список литературы

1. **Журавлев, В. М.** Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, А. В. Никитин // *Нелинейный мир*. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.
2. **Журавлев, В. М.** Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 2008. – Т. 87, № 5. – С. 314–318.
3. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 2008. – Т. 88, № 3. – С. 194–197.
4. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // *Теоретическая и математическая физика*. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 58–71.
5. **Zhuravlev, V. M.** The Application of Generalized Cole-Hopf Substitutions in Compressible-Fluid Hydrodynamics / V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev // *Physics of Wave Phenomena*. – 2010. – Vol. 18, № 4. – P. 245–250.
6. **Zhuravlev, V. M.** Nonlinear Waves in Self-Gravitating Compressible Fluid and Generalized Cole-Hopf Substitutions / V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev // *Physics of Wave Phenomena*. – 2011. – Vol. 19, № 4. – P. 313–317.
7. **Семенов, Э. И.** О новых точных решения неавтономного уравнения Лиувилля / Э. И. Семенов // *Сибирский математический журнал*. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 207–217.
8. **Семенов, Э. И.** Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения / Э. И. Семенов // *Сибирский математический журнал*. – 2003. – Т. 44, № 4. – С. 863–869.
9. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио. – М.: Мир, 1988. – С. 694.
10. **Журавлев, В. М.** Точные решения уравнений Лиувилля в многомерных пространствах / В. М. Журавлев // *Теоретическая и математическая физика*. – 1999. – Т. 120, № 1. – С. 3–19.
11. **Журавлев, В. М.** Модели автоволновых процессов в средах с диффузией и уравнения типа Лиувилля / В. М. Журавлев // *Известия вузов. Сер.: Прикладная нелинейная динамика*. – 2001. – Т. 9, № 6. – С. 115–128.
12. **Журавлев, В. М.** Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией / В. М. Журавлев. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. – 252 с.

References

1. Zhuravlev V. M., Nikitin A. V. *Nelineynyy mir* [The nonlinear world]. 2007, vol. 5, no. 9, pp. 603–611.
2. Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 2008, vol. 87, no. 5, pp. 314–318.
3. Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 2008, vol. 88, no. 3, pp. 194–197.
4. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 159, no. 1, pp. 58–71.
5. Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A. *Physics of Wave Phenomena*. 2010, vol. 18, no. 4, pp. 245–250.
6. Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A. *Physics of Wave Phenomena*. 2011, vol. 19, no. 4, pp. 313–317.
7. Semenov E. I. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2008, vol. 48, no. 1, pp. 207–217.
8. Semenov E. I. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2003, vol. 44, no. 4, pp. 863–869.
9. Dodd R., Eyllbek Dzh., Gibbon Dzh., Morrio Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, p. 694.
10. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1999, vol. 120, no. 1, pp. 3–19.
11. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vuzov. Ser.: Prikladnaya nelineynaya dinamika* [University proceedings. Series: Applied nonlinear dynamics]. 2001, vol. 9, no. 6, pp. 115–128.
12. Zhuravlev V. M. *Nelineynye volny v mnogokomponentnykh sistemakh s dis-persiey i diffuziey* [Nonlinear waves in multidimensional systems with dispersion and diffusion]. Ulyanovsk: Izd-vo UIGU, 2001, 252 p.

Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра теоретической
физики, Ульяновский государственный
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: zhvictorm@gmail.ru

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, sub-department of theoretical
physics, Ulyanovsk State University
(42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

УДК 51-71, 532.51, 538.93

Журавлев, В. М.

О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 84–101. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-8

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ СПЛАВОВ $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$

Аннотация.

Актуальность и цели. В литературе отмечается возможность создания на основе полупроводниковых твердых растворов элементов IV группы периодической системы интересных оптоэлектронных приборов с возможностью встраивания в кремниевую технологию. Сплав $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ наиболее перспективен для этого и интенсивно изучается экспериментально и теоретически. Целью данной работы является моделирование его структурных свойств: изменения кристаллической решетки, длин межатомных связей, углов между связями в зависимости от состава.

Материалы и методы. Исследуется твердый раствор $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ как в практически важном диапазоне доли олова $0 < x < 0,2$, так и при теоретически интересном любом значении x . Моделируется кластер примерно из 4 тысяч атомов, который исследуется методом молекулярной динамики с применением потенциала Терсоффа.

Результаты. Получены зависимости параметра решетки, длин связей, углов между связями от состава. Проведено сравнение с экспериментальными и расчетными (*ab initio*) результатами. Обнаружены отклонение от закона Vegарда, существенно разный вклад связей Ge-Ge, Ge-Sn, Sn-Sn в искажение решетки при изменении состава сплава.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы при оценке упруго-напряженного состояния пленок GeSn, выращенных на различных подложках. Изучение сплава $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ методом молекулярной динамики позволяет проводить исследования на больших по размеру кластерах, чем при квантово-механических расчетах и получать сопоставимые результаты.

Ключевые слова: твердые растворы, сплав германий-олово, метод молекулярной динамики, потенциал Терсоффа.

А. С. Васин

MODELING OF STRUCTURAL PROPERTIES OF $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ ALLOYS

Abstract.

Background. The literature indicates the possibility of creating interesting optoelectronic devices on the basis of semiconductor solid solutions of elements of group IV of the periodic system with the prospect of integration into silicon technology. The $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ alloy seems to be the most promising for this purpose and is intensively studied experimentally and theoretically. The aim of this work is to model the alloy's structural properties: restructuring of the crystal lattice, lengths of atomic bonds, angles between bonds depending on the composition.

Materials and methods. The author investigated a $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ solid solution both for the practically important range of tin fraction $0 < x < 0,2$, and for any theoretically interesting value of x . There was simulated a cluster of about 4 thousand atoms, which was investigated by molecular dynamics (MD) using the Tersoff potential.

Results. The researcher has obtained dependences of lattice parameters, bond lengths, angles between bonds on the composition, as well as compared with experimental and calculated (*ab initio*) results. There has been discovered a deviation from the Vegard law, as well as significantly different contributions of Ge-Ge, Ge-Sn, Sn-Sn bonds in the lattice distortion when changing the composition of the alloy.

Conclusions. The obtained results can be used in evaluation of the elastic-stress state of GeSn films grown on various substrates. The study of the $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ alloy by the MD method allows to conduct researches on much larger clusters than by quantum-mechanical calculations and to obtain comparable results

Key words: solid solutions, germanium–tin alloy, molecular dynamics method, Tersoff potential.

Введение

Полупроводниковые сплавы на основе элементов IV группы GeSn, GeSnSi интенсивно изучаются в последние годы [1–9]. Интерес связан с возможностью создания прямозонного полупроводникового материала, совместимого с кремниевой технологией, с независимой регулировкой постоянной решетки и/или ширины запрещенной зоны. Это позволит разработать новые оптоэлектронные устройства в различных областях применения: фотоприемники в ближнем и дальнем инфракрасном диапазоне, мультиквантовые лазеры, излучатели и модуляторы. В качестве большого достоинства отмечается тот факт, что пленки GeSn произвольной толщины и хорошего качества могут быть выращены прямо на кремнии и могут быть использованы в виде универсальной подложки для выращивания аналогов GeSnSi из элементов III–V групп.

Технологические особенности выращивания эпитаксиальных пленок GeSn и GeSnSi приводят к тому, что они получают, как правило, упруго-напряженными. Деформации в пленках связаны как с несоответствием параметров решеток Ge, Si, Sn, так и с геометрией (в первую очередь, толщиной) пленок и их термическими свойствами (коэффициентом термического расширения). Кроме того, послеростовая термическая обработка может изменить упруго-напряженное состояние за счет движения дислокаций несоответствия на границах эпитаксиальных слоев. Разработка методов контролируемого управления деформациями эпитаксиальных пленок позволяет говорить о деформационной инженерии при создании устройств полупроводниковой электроники [1, 5, 9]. Ближайшая перспектива – создание буферных слоев с перестраиваемыми структурными и термическими свойствами.

Свойства эпитаксиально выращенных полупроводниковых пленок $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ изучаются различными экспериментальными и теоретическими методами. Экспериментально с высокой точностью определяются параметры решетки, состав x , толщины и однородность выращенных слоев, наблюдаются границы раздела слоев с дислокациями несоответствия, косвенно оцениваются деформации в плоскости пленки и перпендикулярно к ней. Теоретические расчеты (как правило, *ab initio*) позволили рассчитать равновесный параметр решетки [1, 2, 4, 10, 11], энергетическую зонную структуру [2, 5, 12]. Одним из самых информационных экспериментальных методов является рамановская спектроскопия, основанная на явлении комбинационного рассеяния света (КРС). Эта неразрушающая методика позволяет получить сведения о составе пленок и деформациях в них [8, 9, 13, 14].

Мы предлагаем расчет структурных свойств на основе полуэмпирического потенциала межатомного взаимодействия Терсоффа. Такой подход позволяет с других позиций изучить искажения кристаллической решетки при образовании сплава, исследовать отклонения от закона Вегарда, получить конкретные структурные характеристики во всем диапазоне изменения x .

1. Методика моделирования

Аналогично нашим предыдущим работам [15, 16] моделировался кластер из N^3 атомов в виде куба размером $N \times N \times N$ элементарных ячеек идеальной алмазной структуры. При $N = 8$ кластер включает 4096 атомов, размер куба $\approx 4,5\text{--}5,2$ нм. Первоначальный параметр решетки выбирался в соответствии с составом x исходя из закона Вегарда. Узлы построенной таким образом решетки заполнялись случайно долей x атомов Sn и долей $(1 - x)$ атомов Ge. Взаимодействие между атомами задавалось потенциалом Терсоффа [17, 18], приспособленным для описания межатомных связей элементов IV группы и наиболее часто используемым для моделирования кристаллов со структурой алмаза.

В силу различия параметров решетки чистых германия и α -олова полученная структура оказывалась неравновесной. Далее по методу молекулярной динамики с использованием алгоритма Верле проводилась ее релаксация к минимуму потенциальной энергии. Применялись периодические граничные условия. Диссипация энергии осуществлялась за счет искусственного уменьшения кинетической энергии в определенные моменты времени.

После релаксации рассчитывались структурные характеристики: длины связей между соседними атомами различных типов – Ge-Ge, Ge-Sn, Sn-Sn, их средние значения и гистограммы распределения по величине, то же самое – для различных углов между связями. Также строились парные корреляционные функции для атомов моделируемого кристаллита с учетом периодических граничных условий, определяемые как $g(r) = ni(r) / n$, где ni – среднее число центров атомов Ge или Sn, попадающих в сферический слой радиусом от r до $r + \Delta r$ с центром в атоме того же типа, n – полное число атомов этого типа. При этом оказалось достаточно рассмотреть не более 3–4 координационных сфер и взять Δr равной одной сотой от параметра решетки. Как известно [19], парная корреляционная функция характеризует ближний порядок сплава.

При проведении расчетов выяснилось, что наибольшие отклонения от средних значений возникают из-за первоначального случайного распределения атомов олова по узлам идеальной геометрической структуры. Поэтому все приводимые ниже результаты получены усреднением не менее, чем по десяти случайным реализациям моделируемого кристаллита.

2. Результаты и их обсуждение

Отступление от закона Вегарда

Для рассматриваемых сплавов $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ в первом приближении считается, что параметр решетки линейно зависит от состава x :

$$a_{\text{GeSn}}(x) = a_{\text{Ge}}(1 - x) + a_{\text{Sn}}x, \quad (1)$$

где a_{Ge} , a_{Sn} – параметры решеток чистых Ge и α -Sn, соответственно. Соотношение (1), как известно, называется законом Вегарда. Однако эксперименты и модельные расчеты [1–3, 6,11] показывают отклонение от этого закона при более точном рассмотрении. Оказывается также, что при сравнении с аналогичным сплавом $Ge_{1-x}Si_x$ величина отклонения существенно больше и знак отклонения не отрицательный, а положительный. Предложено вместо (1) использовать формулу

$$a_{GeSn}(x) = a_{Ge}(1-x) + a_{Sn}x + \theta(1-x)x, \quad (2)$$

где константу θ называют параметром наклона. О величине θ пока нет единого мнения, тем более для всего диапазона изменения x (заметим, что экспериментально достигнуты значения $0 < x < 0,2$, теоретические *ab initio* расчеты имеются и при некоторых других составах).

По нашей модели мы рассчитали значения параметра решетки в зависимости от состава для x с шагом 0,1 при нулевой температуре (т.е. когда движение всех атомов прекращается). Для заданного состава первоначально задавался параметр решетки $a_{GeSn}^{(0)}$, соответствующий линейному закону Вегарда, и определялась потенциальная энергия кристаллита после релаксации. Также рассчитывались аналогичные потенциальные энергии при небольшом отклонении a_{GeSn} от $a_{GeSn}^{(0)}$. Зависимость потенциальной энергии от a_{GeSn} имеет минимум, определение которого и было целью расчетов. На рис. 1 показана зависимость равновесного параметра решетки от состава x и его отклонение $\Delta a_{GeSn} = a_{GeSn} - a_{GeSn}^{(0)}$ от закона Вегарда. Здесь же приведена кривая, подгоняющая расчетные данные под формулу (2).

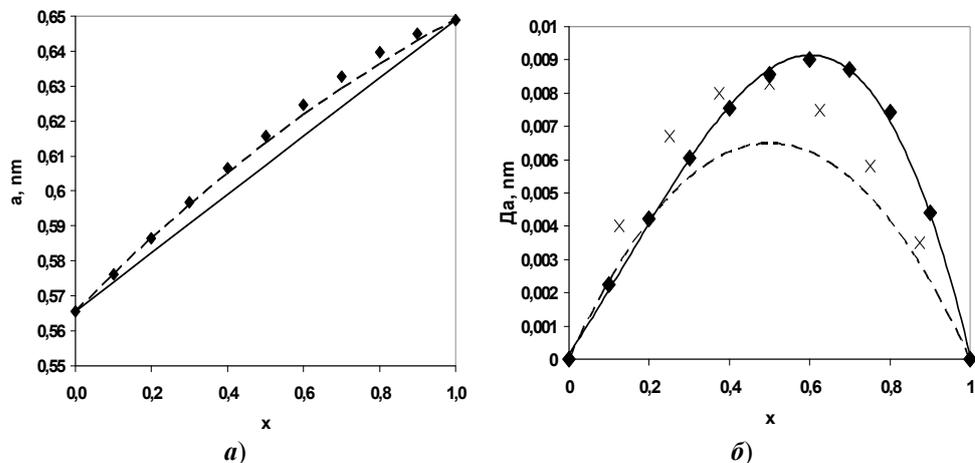


Рис. 1. Зависимость параметра решетки от доли олова (**a**) и отклонение от закона Вегарда (**b**): ромбы – наши данные; штриховая линия – подгонка по формуле (2); сплошная линия на (**a**) – по закону Вегарда; сплошная линия на (**b**) – подгонка по формуле (3); крестики на (**b**) – расчет [4]

Наилучший результат в практически важной области составов $0 < x < 0,2$ получается при $\theta = 0,026$ нм. Это значение существенно отличается

ся от полученного в [6] из эксперимента значения 0,00088 нм (с ошибкой, превышающей само это значение), но близко к расчетному *ab initio* значению 0,032 нм [4]. Видно, что наши результаты отличаются от симметричной кривой, полученной по (2). Максимальное отклонение от закона Вегарда достигается при $x = 0,6$, а не при $x = 0,5$. Аппроксимация полиномом третьей степени дает зависимость

$$\Delta a = 0,018x + 0,014x^2 - 0,032x^3, \text{ нм.} \quad (3)$$

Сравнение наших данных с результатами других работ в практически важной области составов показано на рис. 2. Видно, что приведенные зависимости $a(x)$ несколько отличаются друг от друга. Отчасти это связано с различными методами расчета и различными методами получения эпитаксиальных пленок, погрешностями измерений. Экспериментальные данные также могут отличаться из-за остаточных упругих напряжений в пленках. Видно, что результаты наших расчетов с использованием потенциала Терсоффа в целом хорошо согласуются с другими данными в области малых значений x .

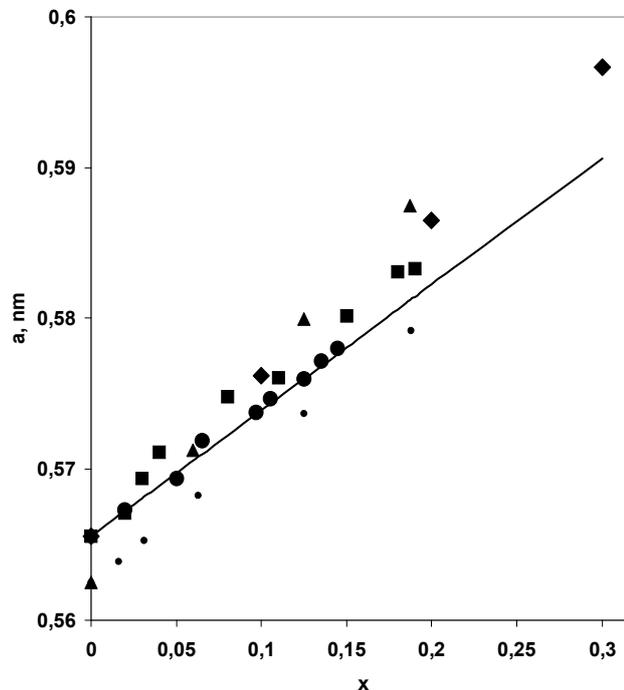


Рис. 2. Параметр решетки в зависимости от состава в области малых значений x : сравнение с литературными данными. Ромбы – наши результаты; треугольники – расчет по теории функционала плотности (ТФП) [3]; квадраты – экспериментальные данные на пленках, выращенных химическим осаждением из пара [11]; кружки – экспериментальные данные на пленках, полученных молекулярно лучевой эпитаксией [6]; точки – расчет по ТФП, но для упорядоченных (не случайных) сплавов [1]; прямая линия – по закону Вегарда

Длины связей

На рис. 3 показаны зависимости от доли олова длин межатомных связей разного типа: Sn-Sn, Sn-Ge, Ge-Ge. Видно, что они существенно отлича-

ются от закона Вегарда. Это свидетельствует о том, что при включении в алмазную решетку германия атомов олова решетка перестраивается несимметричным образом, т.е. перестает быть алмазной. Похожие закономерности обнаружены и при моделировании сплава GeSi [15], но здесь эти отклонения значительно больше, что связано с большим отличием параметра решетки α -Sn от параметра решетки Ge, чем у Si и Ge. Видно также, что длины связей Sn-Sn менее всего изменяются с составом, к тому же при малых x эта зависимость нелинейная. Кроме того, рис. 3 показывает, что сильнее изменяются связи Sn-Ge, а слабее – связи Sn-Sn, что отличается от работы [20], в которой сильнее всего изменяются связи Ge-Ge

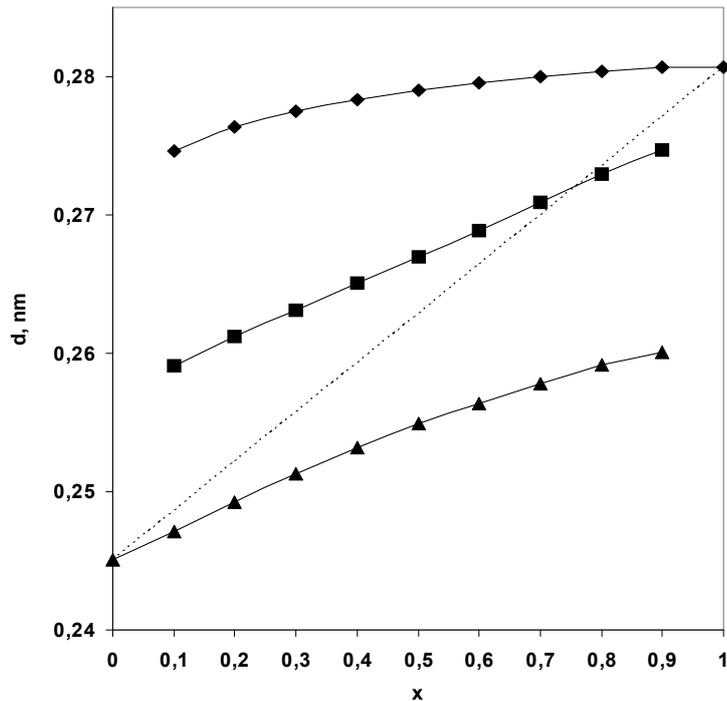


Рис. 3. Зависимость длин связей от доли олова. Ромбы – связи Sn-Sn; квадраты – Ge-Sn; треугольники – Ge-Ge; штриховая линия – по закону Вегарда

Дополнительно были построены гистограммы распределения длин связей при $x = 0,1$ и $x = 0,5$, которые изображены на рис. 4. Из гистограмм видно, что увеличение доли олова дает сдвиг и уширение пиков соответствующим связям Ge-Ge и Ge-Sn, однако разброс длин связей Sn-Sn почти не увеличивается, хотя максимум этого пика тоже смещается в соответствии с рис. 3.

Важным представляется моделирование парных корреляционных функций согласно методике, описанной в [19]. Данные функции показывают вероятность нахождения атома в сферическом слое шириной dr на расстоянии r от другого атома. Парная корреляционная функция является инструментом для описания ближнего порядка. На рис. 5 показаны $g(r)$ для $x = 0,25$. Пики соответствуют расположению атомов в первой, второй и т.д. координационных сферах для Ge и Sn соответственно. Видно, что ближний порядок для связей Ge-Ge и Sn-Sn различается только в пределах первой координаци-

онной сферы: первые пики для Ge и Sn смещены. В дальних координационных сферах расположение атомов некоррелированно (пики для германия и олова находятся при одних и тех же значениях r и они более широкие). Эта же закономерность наблюдается и при других значениях x . Заметим, что уширение пиков связано не с тепловым движением, а со случайностью распределения атомов Ge и Sn по расчетной ячейке.

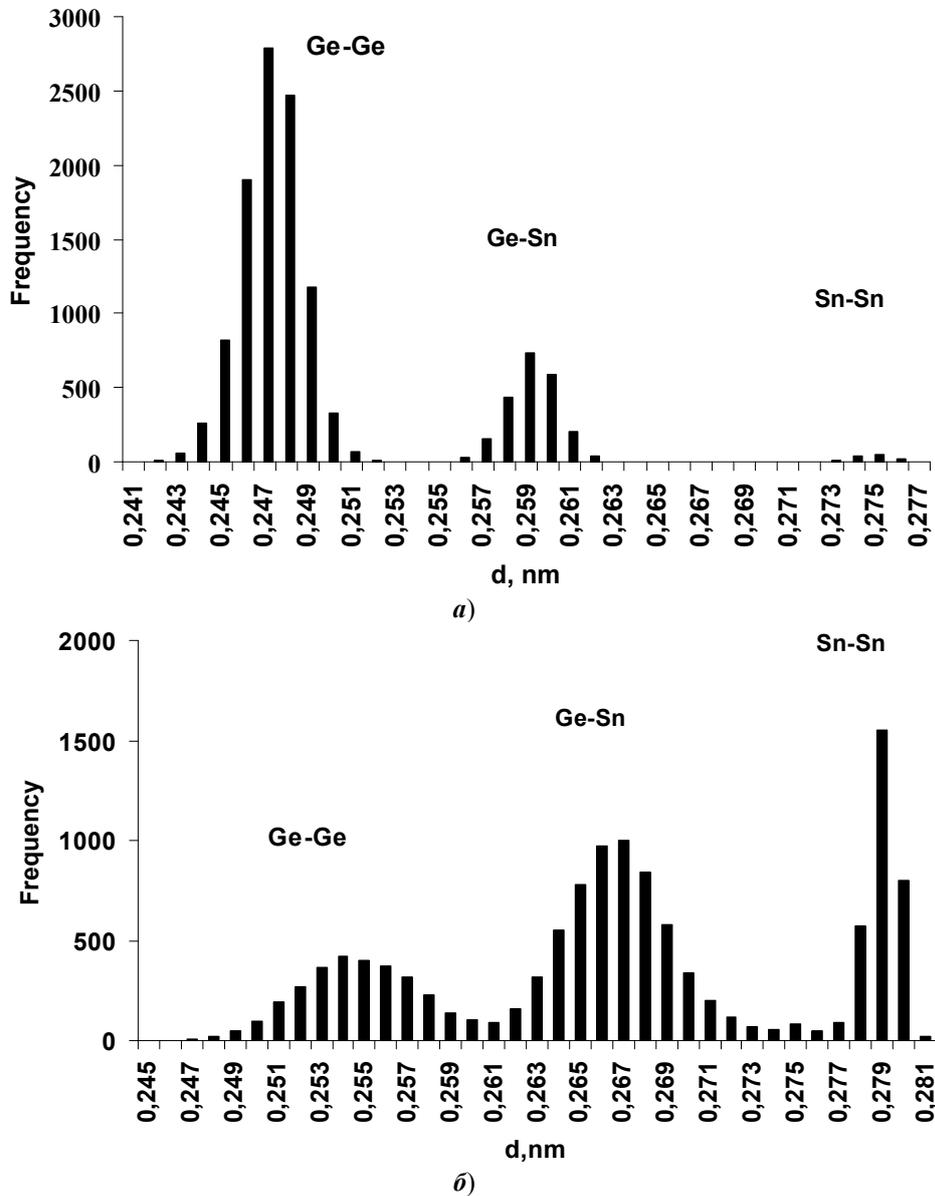


Рис. 4. Гистограммы распределения длин связей при: а) $x=0,1$; б) $x=0,5$

Углы между связями

О перестройке кристаллической структуры сплава с увеличением доли олова свидетельствует также изменение углов между связями ближайших со-

седей. Всего таких углов получается шесть: Sn-Sn-Sn, Sn-Sn-Ge и т.д. Гистограммы распределения по величине для некоторых из них показаны на рис. 6. Видно, что углы распределены в достаточно широком диапазоне и максимумы распределения смещены от значения тетраэдрического угла $109,5^\circ$ идеальной алмазной структуры. В частности, углы между связями Sn-Sn-Sn оказываются в среднем меньше, а углы между связями Ge-Ge-Ge – в среднем больше $109,5^\circ$.

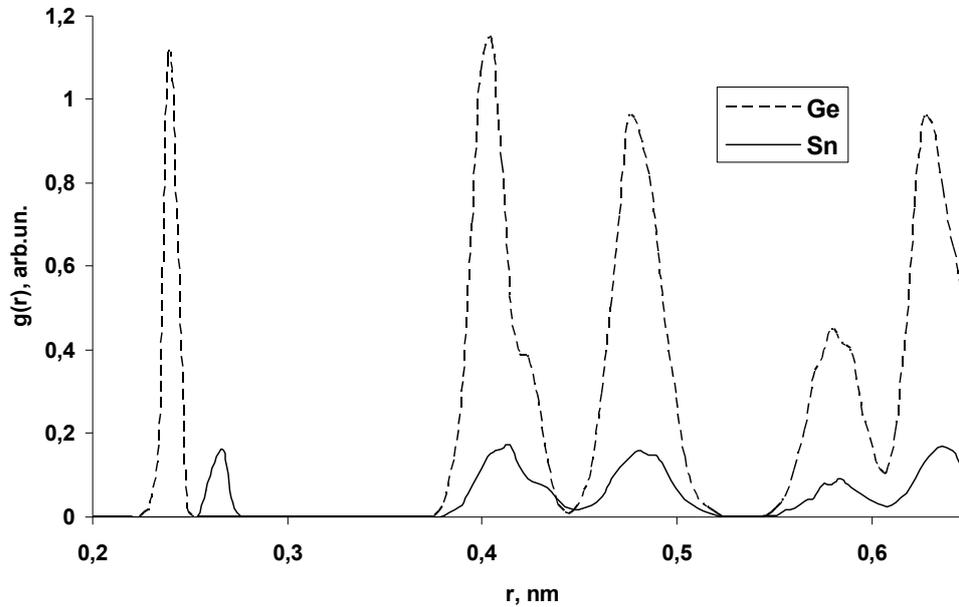


Рис. 5. Парная корреляционная функция для сплава $Ge_{0.75}Sn_{0.25}$; r – радиус просмотра. Каждый пик соответствует определенной координационной сфере

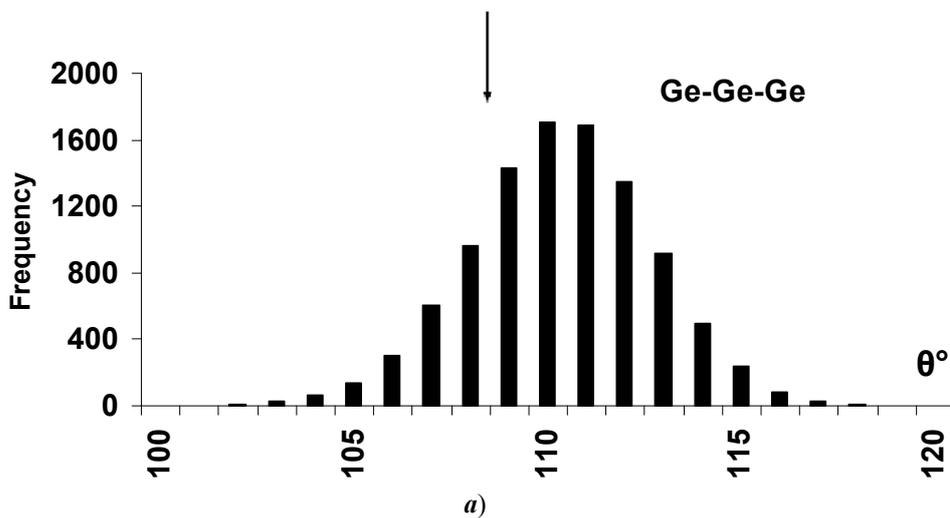


Рис. 6. Гистограммы распределения углов между связями при $x = 0,2$. Стрелка показывает теоретическое значение тетраэдрического угла ($109,5^\circ$) в алмазной решетке (см. также с. 110)

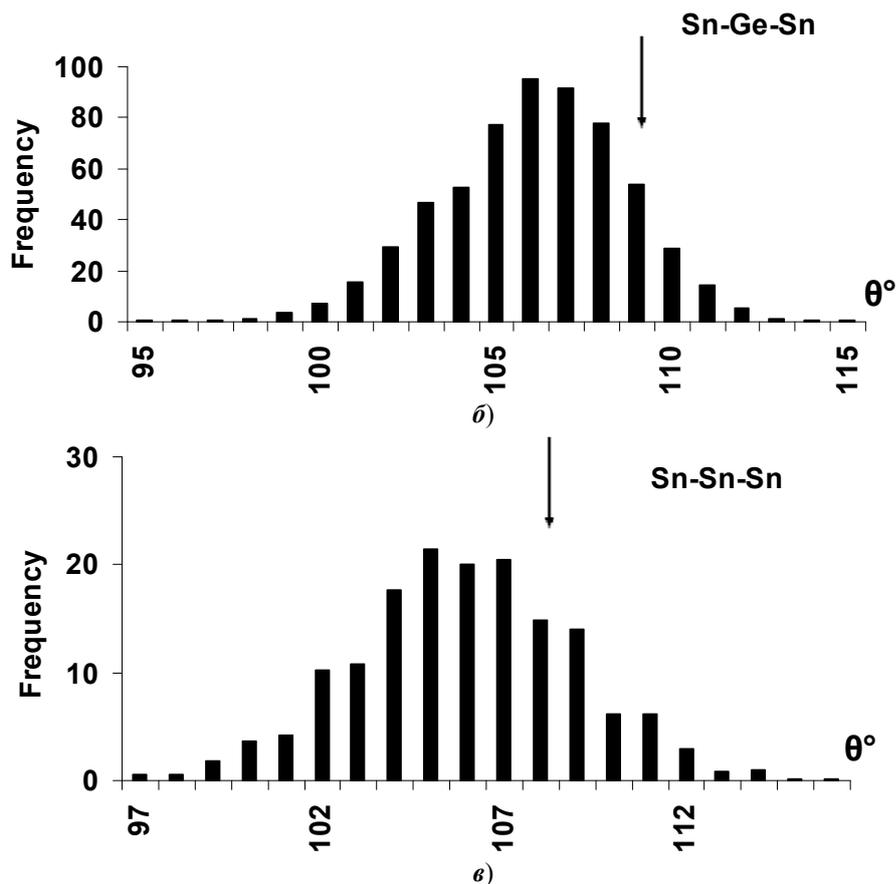


Рис. 6. Окончание

Таким образом, кристаллическая структура сплава GeSn при релаксации перестраивается весьма существенно и перестает подчиняться закону Вегарда, который предполагает изменение алмазной структуры с составом линейным образом. Важнейший вклад в данный результат вносит именно нестабильность алмазной структуры α -Sn в области малого содержания олова. Вместе с тем это искажение не настолько велико, чтобы говорить об отсутствии периодичности, что и подтверждают результаты экспериментов по определению параметра решетки сплавов методами рентгеновской дифрактометрии.

Заключение

Результаты расчетов по модели, использующей полуэмпирический потенциал Терсоффа, показывают достаточно хорошее соответствие с экспериментальными и расчетными (из первых принципов) результатами. Это проявляется как при исследовании параметра решетки и его отклонения от закона Вегарда, так и при изучении длин связей и углов между ними. Кроме того, наши расчеты выявили различие в расположении атомов Ge и Sn в первой координационной сфере, в отличие от расположения в дальних сферах.

Следует также отметить, что модель на основе потенциала Терсоффа строится для значительно большего числа атомов, требует меньших вычислительных ресурсов и достаточно просто программируется.

Список литературы

1. GeSn semiconductors for band-gap and lattice engineering / M. Bauer, J. Taraci, J. Tolle, A.V.G. Chizmeshya, S. Zollner, David J. Smith, J. Menendez, Changwu Hu, J. Kouvetakis // *Appl. Phys. Lett.* – 2002. – Vol. 81. – P. 2992–2994.
2. **Kouvetakis, J.** Tin-based group IV semiconductors: new platforms for opto – and microelectronics on silicon / J. Kouvetakis, J. Menendez, A. V. G. Chizmeshya // *Ann. Rev. Mater. Res.* – 2006. – Vol. 36. – P. 497 – 554.
3. **Chibane, Y.** Electronic structure of $\text{Sn}_x\text{Ge}_{1-x}$ alloys for small Sn compositions: unusual structural and electronic properties / Y. Chibane, M. Ferhat // *J. Appl. Phys.* – 2010. – Vol. 107. – P. 053512.
4. **Pulikkotil, J. J.** Structure of $\text{Sn}_{1-x}\text{Ge}_x$ random alloys as obtained from the coherent potential approximation / J. J. Pulikkotil, A. Chroneos, U. Schwingenschlögl // *J. Appl. Phys.* – 2011. – Vol. 110. – P. 036105.
5. **Gupta, S.** Achieving direct band gap in germanium through integration of Sn alloying and external strain / S. Gupta, B. Magyari-Kope, Y. Nishi, K. C. Soraswat // *J. Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 113. – P. 073707.
6. Lattice constant and substitutional composition of GeSn alloys grown by molecular beam epitaxy / N. Bhargava, M. Coppinger, J. Prakash Gupta, L. Wielunski, J. Kolodzey // *Appl. Phys. Lett.* – 2013. – Vol. 103. – P. 041908.
7. **Ventura, C. I.** Electronic structure of $\text{Ge}_{1-x-y}\text{Si}_x\text{Sn}_y$ ternary alloys for multijunction solar cells / C. I. Ventura, J. D. Querales-Flores, J. D. Fuhr, R. A. Barrio // *Prog. Photovolt: Res. Appl.* – 2015. – Vol. 23. – P. 112–118.
8. **Kasper, E.** Germanium tin: silicon photonics toward the mid-infrared / E. Kasper, M. Kittler, M. Oehme, T. Arguirov // *Photon. Res.* – 2013. – Vol. 1. – P. 69–76.
9. Strain and composition effects on Raman vibrational modes of silicon-germanium-tin ternary alloys / J.-H. Fournier-Lupien, S. Mukherjee, S. Wirths, E. Pippel, N. Hayazawa, G. Mussler, J. M. Hartmann, P. Desjardins, D. Buca, O. Moutanabbir // *Appl. Phys. Lett.* – 2013. – Vol. 103. – P. 263103.
10. **Shen, J.** *Ab initio* calculation of the structure of the random alloys $\text{Sn}_x\text{Ge}_{1-x}$ / J. Shen, J. Zi, X. Xie // *Phys. Rev. B.* – 1997. – Vol. 53. – P. 12084–12087.
11. **Chizmeshya, A. V. G.** Experimental and theoretical study of deviations from Vegard's law in the $\text{Sn}_x\text{Ge}_{1-x}$ system / A. V. G. Chizmeshya, M. R. Bauer, J. Kouvetakis // *Chem. Mater.* – 2003. – Vol. 15. – P. 2511–2519.
12. Electronic band structures of $\text{Sn}_x\text{Ge}_{1-x}$ semiconductors: A first-principles density functional theory study / M. H. Lee, P. L. Liu, Y. A. Hong, Y. T. Chou, J. Y. Hong, J. Y. Siao // *J. Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 113. – P. 063517.
13. Relaxed and strained patterned germanium-tin structures: A Raman scattering study / R. Cheng, W. Wang, X. Gong, L. F. Sun, P. F. Guo, H. L. Hu, Z. X. Shen, G. Q. Han, Y. C. Yeo // *ECS J. Solid State Science and Technology.* – 2013. – Vol. 2. – P. 138–145.
14. The strain dependence of $\text{Ge}_{1-x}\text{Sn}_x$ ($x=0.083$) Raman shift / C. Chang, H. Li, T. P. Chen, W. K. Tseng, H. Chen, C. T. Ko, C. Y. Hsie, M. J. Che, G. Sun // *Thin Solid Films.* – 2015. – Vol. 593. – P. 40–43.
15. **Vasin, A. S.** Phonon modes and Raman scattering in $\text{Si}_x\text{Ge}_{1-x}$ nanocrystals: microscopic modeling / A. S. Vasin, O. V. Vikhrova, M. I. Vasilevskiy // *Phys. Status Solidi (C).* – 2013. – Vol. 10. – P. 701–704.
16. **Vasin, A. S.** Effects of alloy disorder and confinement on phonon modes and Raman scattering in $\text{Si}_x\text{Ge}_{1-x}$ nanocrystals: A microscopic modeling / A. S. Vasin, O. V. Vikhrova, M. I. Vasilevskiy // *J. Appl. Phys.* – 2014. – Vol. 115. – P. 143505.
17. **Tersoff, J.** Modeling solid-state chemistry: Interatomic potentials for multicomponent systems / J. Tersoff // *Phys. Rev. B.* – 1989. – Vol. 39, № 8. – P. 5567.

18. **Powell, D.** Elasticity, lattice dynamics and parameterization techniques for the Tersoff potential applied to elemental and type III-V semiconductors / D. Powell // The university of Sheffield, semiconductor materials and devices group, department of electronic and electrical engineering. – 2006. – P. 62.
19. **Займан, Дж.** Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем / Дж. Займан. – М. : Мир, 1982. – 592 с.

References

1. Bauer M., Taraci J., Tolle J., Chizmeshya A.V.G., Zollner S., Smith David J., Menendez J., Changwu Hu, Kouvetakis J. *Appl. Phys. Lett.* 2002, vol. 81, pp. 2992–2994.
2. Kouvetakis J., Menendez J., Chizmeshya A.V.G. *Ann. Rev. Mater. Res.* 2006, vol. 36, pp. 497–554.
3. Chibane Y., Ferhat M. *J. Appl. Phys.* 2010, vol. 107, p. 053512.
4. Pulikkotil J. J., Chronos A., Schwingenschlögl U. *J. Appl. Phys.* 2011, vol. 110, p. 036105.
5. Gupta S., Magyari-Kope B., Nishi Y., Soraswat K. C. *J. Appl. Phys.* 2013, vol. 113, p. 073707.
6. Bhargava N., Coppinger M., J. Prakash Gupta, Wielunski L., Kolodzey J. *Appl. Phys. Lett.* 2013, vol. 103, p. 041908.
7. Ventura C. I., Querales-Flores J. D., Fuhr J. D., Barrio R. A. *Prog. Photovolt: Res. Appl.* 2015, vol. 23, pp. 112–118.
8. Kasper E., Kittler M., Oehme M., Arguirov T. *Photon. Res.* 2013, vol. 1, pp. 69–76.
9. Fournier-Lupien J.-H., Mukherjee S., Wirths S., Pippel E., Hayazawa N., Mussler G., Hartmann J. M., Desjardins P., Buca D., Moutanabbir O. *Appl. Phys. Lett.* 2013, vol. 103, p. 263103.
10. Shen J., Zi J., Xie X. *Phys. Rev. B.* 1997, vol. 53, pp. 12084–12087.
11. Chizmeshya A. V. G., Bauer M. R., Kouvetakis J. *Chem. Mater.* 2003, vol. 15, pp. 2511–2519.
12. Lee M. H., Liu P. L., Hong Y. A., Chou Y. T., Hong J. Y., Siao J. Y. *J. Appl. Phys.* 2013, vol. 113, p. 063517.
13. Cheng R., Wang W., Gong X., Sun L. F., Guo P. F., Hu H. L., Shen Z. X., Han G. Q., Yeo Y. C. *ECS J. Solid State Science and Technology.* 2013, vol. 2, pp. 138–145.
14. Chang C., Li H., Chen T. P., Tseng W. K., Chen H., Ko C. T., Hsie C. Y., Che M. J., Sun G. *Thin Solid Films.* 2015, vol. 593, pp. 40–43.
15. Vasin A. S., Vikhrova O. V., Vasilevskiy M. I. *Phys. Status Solidi (C).* 2013, vol. 10, pp. 701–704.
16. Vasin A. S., Vikhrova O. V., Vasilevskiy M. I. *J. Appl. Phys.* 2014, vol. 115, p. 143505.
17. Tersoff J. *Phys. Rev. B.* 1989, vol. 39, no. 8, p. 5567.
18. Powell D. *The university of Sheffield, semiconductor materials and devices group, department of electronic and electrical engineering.* 2006, p. 62.
19. Zayman Dzh. *Modeli besporyadka. Teoreticheskaya fizika odnorodno neuporyadochennykh sistem* [Disorder models. Theoretical physics of homogeneously disordered systems]. Moscow: Mir, 1982, 592 p.

Васин Александр Сергеевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра информационных
технологий в физических исследованиях,
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет имени Н. И. Лобачевского
(Россия, г. Нижний Новгород,
пр. Гагарина, 23)

E-mail: vasin@phys.unn.ru

Vasin Aleksandr Sergeevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of information technologies
in physical research, Lobachevsky State
University of Nizhny Novgorod
(23 Gagarina avenue, Nizhny
Novgorod, Russia)

УДК 538.91:548.31

Васин, А. С.

Моделирование структурных свойств сплавов $Ge_{1-x}Sn_x$ / А. С. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 102–113. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-9

ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ КВАНТОВЫХ ПРОВОЛОК, СВЯЗАННЫЕ С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИЕЙ $D^{(-)}$ -СОСТОЯНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Развитие полупроводниковой наноэлектроники обусловлено созданием новых приборов на основе низкоразмерных структур с заданными электронными спектрами – квантовых точек, квантовых ям, квантовых проволок (КП), квантовых цилиндров сверхрешеток и т.д. Особенностью данных структур является возможность управления их транспортными и оптическими свойствами во внешних полях. Кроме того, оптические и электрические свойства полупроводниковых низкоразмерных структур в значительной степени определяются наличием в них примесей. На сегодня особенно актуальной задачей наноэлектроники является исследование влияния сильных внешних полей на транспортные свойства полупроводниковых низкоразмерных систем с примесными центрами, так как, например, влияние сильного электрического поля может привести к ионизации примесей и, следовательно, к изменению концентрации свободных носителей зарядов в зоне проводимости. Целью данной работы является теоретическое исследование влияния внешнего электрического поля на энергию связи квазистационарных примесных состояний в КП в условиях термоэлектрической ионизации примеси, а также оценка плотности тока в КП в продольном по отношению к ее оси электрическом поле.

Материалы и методы. Кривые зависимости средней энергии связи примесного состояния, средней энергии основного состояния электрона и плотности тока от напряженности электрического поля построены для случая $D^{(-)}$ -центра в InSb КП. Короткодействующий потенциал $D^{(-)}$ -центра моделировался потенциалом нулевого радиуса. Дисперсионное уравнение для $D^{(-)}$ -состояния электрона в КП при наличии продольного электрического поля получено в приближении эффективной массы. Выражение для плотности тока получено с использованием уравнения электронейтральности.

Результаты. В модели потенциала нулевого радиуса для случая низких температур теоретически исследована электропроводимость полупроводниковой КП с параболическим потенциалом конфинмента, содержащей донорные примеси, в продольном по отношению к ее оси электрическом поле. Получено дисперсионное уравнение, определяющее зависимость энергии связи примеси от напряженности электрического поля. Рассчитана ширина примесного уровня, которая является нелинейной возрастающей функцией напряженности электрического поля. Установлено, что ширина примесного уровня уменьшается с увеличением глубины его залегания. Показано разрушение связанного состояния электрона на примеси под действием электрического поля, т.е. явление термоэлектрической ионизации. Найдено, что напряженность электрического поля ионизации возрастает с увеличением средней энергии связи примеси. Установлено, что в условиях низких температур зависимость плотности тока в КП от напряженности продольного электрического поля носит суперлинейный характер в приближении постоянной подвижности электронов.

Выводы. С фундаментальной точки зрения рассмотренный эффект термоэлектрической ионизации позволяет рассчитать среднюю энергию связи, определить концентрацию примесных состояний в КП и оценить температуру истощения примесей, а с прикладной – дает возможность управлять концен-

трацией свободных носителей зарядов и, следовательно, электропроводностью КП. Кроме того, внешнее электрическое поле позволяет влиять на уширение примесных квазистационарных состояний, т.е. изменять их время жизни.

Ключевые слова: квантовая проволока, модель потенциала нулевого радиуса, дисперсионное уравнение, электрическое поле, $D^{(-)}$ -центр, термоэлектрическая ионизация.

A. B. Grunin, I. A. Kirillov

FEATURES OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF QUANTUM WIRES, CONNECTED WITH THE ELICTROSTATIC IONIZATION OF $D^{(-)}$ -STATES

Abstract.

Background. The development of semiconductor nanoelectronics is determined by the creation of new devices based on low-dimensional structures with desired electronic spectrums - quantum dots (QD), quantum wells (QW), quantum wires (QWire), quantum cylinder (QC) superlattices (SL), etc. A feature of these structures is the ability to control their transport and optical properties in external fields. In addition, the optical and electrical properties of semiconductor low-dimensional structures are largely determined by the presence of impurities. As of today, an especially actual task of nanoelectronics is to investigate the influence of strong external fields on the transport properties of semiconductor low-dimensional systems with impurity centers, since, for example, the influence of a strong electric field may lead to ionization of impurities, and, therefore, to changes of the concentration of free charge carriers in the conductivity region [1]. The aim of this work is to theoretically study the influence of an external electric field on the binding energy of the quasistationary impurity states in QWire in conditions of thermoelectric ionization of impurities, as well as to evaluate current density in QWire in the electric field longitudinal with respect to its axis.

Materials and methods. For the case of $D^{(-)}$ -center in InSb QWire the authors constructed curves of the dependence of the average binding energy of the impurity state, the average energy of the ground state of the electron and current density on the electric field strength. The short-range potential of $D^{(-)}$ -center was modelled by the zero-radius potential. The dispersion equation for $D^{(-)}$ -state of the electron in QWire at the presence of the longitudinal electric field was obtained in the effective mass approximation. The expression for the current density was obtained using an electro-neutrality equation.

Results. The conductivity of a semiconductor QWire with a parabolic confinement potential was studied within the framework of the zero-range potential model, containing donor impurities, in the electric field longitudinal with respect to its axis at low temperatures. A dispersion equation determining the dependence of the binding energy of the impurity on the electric field strength was obtained. The authors calculated the width of the impurity level which was a nonlinear increasing function of electric field strength. It has been found that the impurity level width decreases with an increase of its depth. It has been shown that the bound state of an electron on an impurity is destroyed by a strong electric field, i.e. the thermoelectric phenomenon of ionization occurs. It has been discovered that under conditions of low temperatures the dependence of the current density in a QWire in the longitudinal electric field has a superlinear character. It has been revealed that the ionization electric field strength increases with an increase of the average binding energy of the impurity. The researches have found that the current density dependence on the

longitudinal electric field strength have a superlinear character in conditions of low temperatures in QWire in the approximation of constant mobility of electrons.

Conclusions. From the fundamental point of view, the considered effect of thermoelectric ionization allows to calculate the average binding energy, to determine the concentration of impurity states in QWire and to estimate the temperature of impurity exhaustion. As for the point of view of application – it allows to control the concentration of free charge carriers and, hence, electrical conductivity of QWire. In addition, an external electric field allows to influence the broadening of impurity quasistationary states, i.e. to change their life time.

Key words: quantum wire, zero-range potential model, dispersion equation, electric field, $D^{(-)}$ -center, thermoelectric ionization.

Введение

В последние годы повышенный интерес вызывают исследования влияния эффектов электрического поля на оптические [1–3] и транспортные свойства [4, 5] наноструктур с примесными центрами.

К сожалению, на сегодня существует не так много работ, в которых рассматриваются полупроводниковые системы пониженной размерности в сильных внешних полях, в том числе с учетом примесных состояний [1, 6]. Так, в работе [6] рассмотрено влияние электрического поля на положение и ширину уровней размерного квантования в полупроводниковой квантовой яме (КЯ) с прямоугольным удерживающим потенциалом. В широком диапазоне напряженности электрического поля рассчитан штарковский сдвиг квазисвязанных состояний и индуцированное полем однородное уширение, имеющее нелинейную зависимость от поля. Авторами статьи [1] рассчитан ток в цилиндрической квантовой нити (КН) со сверхрешеткой (СР) при одновременном приложении постоянного и переменного электрических полей. Считалось, что КН содержит водородоподобные примесные центры, ионизирующиеся под влиянием электрического поля, что приводит к генерации неравновесных носителей заряда в зоне проводимости. Поставленная в работе [1] задача решалась методом кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений Батнагара – Крука – Гросса (БКГ). В ходе ее решения была обнаружена ступенчатая зависимость постоянной составляющей тока от частоты электрического поля, при этом показано, что расстояние между ступенями определяется шириной мини-зоны проводимости и параметрами поперечного квантового ограничения и не зависит от глубины залегания примеси. Транспортные свойства квантовых проволок (КП) с H -подобными примесными центрами, связанные с эффектом фотонного увлечения электронов в продольном магнитном поле, исследовались в работе [7].

Целью данной работы является теоретическое исследование влияния внешнего электрического поля на энергию связи квазистационарных примесных состояний в КП в условиях термоэлектрической ионизации примеси, а также оценка плотности тока в КП в продольном по отношению к ее оси электрическом поле.

Модели

В данной работе рассматривается цилиндрическая КП длиной L_z и диаметром L , расположенная в продольном электрическом поле с вектором напряженности \vec{F} .

Напряженность внешнего электрического поля, в которое помещена КП, выбирается в интервале от 10^4 В/м до $2,5 \cdot 10^5$ В/м. Выбор нижней границы данного диапазона обусловлен, с одной стороны, значением напряженности электрического поля, при котором дрейфовая скорость электронов v становится сравнимой со среднеквадратической скоростью их теплового движения $\sqrt{v_T^2}$. С другой стороны, значение напряженности электрического поля не должно превышать значения, при котором происходит ударная ионизация примеси.

Для описания одноэлектронных состояний в КП используется параболический потенциал конфайнмента

$$V(\vec{r}) = \frac{m^* \omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m^* \omega_y^2 y^2}{2} + \frac{m^* \omega_z^2 z^2}{2}, \quad (1)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – декартовы координаты ($-L/2 \leq x \leq L/2$; $-L/2 \leq y \leq L/2$; $-L_z/2 \leq z \leq L_z/2$); m^* – эффективная масса электрона в КП, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – характерная частота удерживающего потенциала КП вдоль осей OX, OY и OZ соответственно.

Рассмотрим изотропную вдоль осей OX и OY КП, причем $\omega_x = \omega_y = \omega \gg \omega_z$. Модель удерживающего потенциала КП вдоль оси OZ представлена на рис. 1.

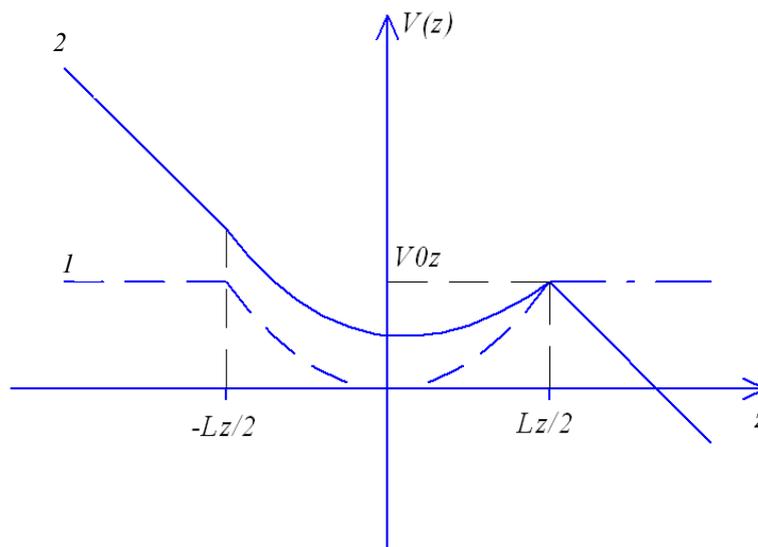


Рис. 1. Модель удерживающего потенциала КП вдоль оси OZ

На рис. 1. кривая 1 – удерживающий потенциал КП без электрического поля $V_1(z) = m^* \omega_z^2 z^2 / 2$; 2 – удерживающий потенциал КП под воздействием электрического поля $V_2(z) = m^* \omega_z^2 z^2 / 2 + eF(L_z/2 - z)$.

Волновые функции и энергетический спектр электрона в КП при наличии внешнего продольного электрического поля имеют вид

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \frac{1}{\pi^{3/4} a \sqrt{2^{n_1+n_2+n_3} n_1! n_2! n_3! a_z}} H_{n_1}\left(\frac{x}{a}\right) H_{n_2}\left(\frac{y}{a}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) \sum_{n_3=0}^{\infty} I_{n_3}(E) H_{n_3}\left(\frac{z-z_0}{a_z}\right) \exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{2a_z^2}\right), \quad (2)$$

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \overline{E_{n_1, n_2, n_3}} + \frac{i\hbar\Gamma_{n_3}}{2}, \quad (3)$$

где $I_{n_3}(E) = \sqrt{2/(\pi\Gamma_{n_3})} i\hbar\Gamma_{n_3} / (2(E - E_{n_3}) + i\hbar\Gamma_{n_3})$ – резонансы Брейта – Вигнера [6];

$$E_{n_3} = \hbar\omega_z(n_3 + 1/2) - e^2 F^2 / (2m^* \omega_z^2) + eFL_z / 2;$$

$\hbar\Gamma_{n_3}$ – ширина уровня E_{n_3} ;

$$\overline{E_{n_1, n_2, n_3}} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) + \hbar\omega_z(n_3 + 1/2) - e^2 F^2 / (2m^* \omega_z^2) + eFL_z / 2 -$$

среднее значение энергии электрона в зоне проводимости КП; $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$ – осцилляторные квантовые числа; $a = \sqrt{\hbar / (m^* \omega)}$ – характерная длина осциллятора вдоль оси OX (или OY), $a_z = \sqrt{\hbar / (m^* \omega_z)}$ – характерная длина осциллятора вдоль оси OZ ; $H_n(x)$ – полином Эрмита [8]; $z_0 = |e|F / (m^* \omega_z^2)$; e – заряд электрона; F – напряженность электрического поля.

Поскольку удерживающий потенциал КП должен иметь конечную глубину, то в выбранной нами модели потенциала конфинмента (1) его амплитуда является эмпирическим параметром. Амплитуда удерживающего потенциала вдоль оси OX (или OY) равна $V_{0x(0y)} = m^* \omega^2 L^2 / 8$; вдоль оси OZ – $V_{0z} = m^* \omega_z^2 L_z^2 / 8$. Следовательно, выражения (2) и (3) справедливы, когда $V_{0x(0y)} / (\hbar\omega) \gg 1$ и $V_{0z} / (\hbar\omega_z) \gg 1$.

Пусть $D^{(-)}$ -центр расположен в точке $\overline{R}_a = (x_a, y_a, z_a)$. Потенциал примеси моделируется потенциалом нулевого радиуса (ПНР) «мощностью» $\gamma = 2\pi\hbar^2 / (\alpha m^*)$. В декартовой системе координат ПНР может быть записан в виде [9]:

$$V_{\delta}(\vec{r}, \overline{R}_a) = \gamma \delta(x - x_a) \delta(y - y_a) \delta(z - z_a) \times$$

$$\times \left[1 + (x - x_a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_a) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (4)$$

где α определяется энергией $E_i = -\hbar^2 \alpha^2 / (2m^*)$ связанного состояния этого же $D^{(-)}$ -центра в объемном материале; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Расчеты

Волновая функция $\Psi_{\lambda}^{QWire}(\vec{r}, \vec{R}_a)$ электрона, локализованного на $D^{(-)}$ -центре, в приближении эффективной массы удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\left(E_{\lambda} - \hat{H} \right) \Psi_{\lambda}^{QWire}(\vec{r}, \vec{R}_a) = V_{\delta}(\vec{r}, \vec{R}_a) \Psi_{\lambda}^{QWire}(\vec{r}, \vec{R}_a), \quad (5)$$

где $E_{\lambda} = \overline{E}_{\lambda} + \frac{i\hbar\Gamma_{\lambda}}{2}$, $\overline{E}_{\lambda} = \text{Re } E_{\lambda} = \hbar^2 \lambda^2 / 2m^* > 0$ – среднее значение энергии примесного электрона, отсчитанное от дна ямы; $\hbar\Gamma_{\lambda} = 2 \text{Im } E_{\lambda}$ – ширина примесного уровня E_{λ} ; \hat{H} – оператор Гамильтона.

Решение уравнения (5), выполняемое по методике, изложенной в работе [9], приводит к дисперсионному уравнению для $D^{(-)}$ -состояния электрона в КП при наличии продольного электрического поля:

$$\begin{aligned} \sqrt{|E_i|} = & \frac{\sqrt{2\pi}\hbar^3}{m^{*3/2}} \left(-\frac{\sqrt{\pi}b}{\beta_z \sqrt{2\beta}} + C(\vec{R}_a, \vec{R}_a) \int_0^{\infty} \exp(-bt) \times \right. \\ & \times \left(\frac{1}{(1 - \exp(-2\beta t)) \sqrt{1 - \exp(1 - \exp(-2\beta_z t))}} \times \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left(\frac{2(x_a^2 + y_a^2) \exp(-\beta t)}{a^2 (1 + \exp(-\beta t))} + \frac{2(z_a - z_0)^2 \exp(-\beta_z t)}{a_z^2 (1 + \exp(-\beta_z t))} - \frac{t^{-3/2}}{2\beta_z \sqrt{2\beta}} \right) dt \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta = \hbar\omega / E_d; \quad \beta_z = \hbar\omega_z / E_d; \quad C(\vec{r}, \vec{R}_a) = & -\beta\beta_z / (\pi^{3/2} E_d a^2 a_z) \times \\ & \times \exp \left(-\left(x_a^2 + x^2 + y_a^2 + y^2 \right) / (2a^2) - \left((z_a - z_0)^2 + (z - z_0)^2 \right) / (2a_z^2) \right); \end{aligned}$$

E_d – эффективная боровская энергия; $b = \eta^2 \beta \beta_z + \beta_z + \beta / 2$; $\eta^2 = \overline{E}_{\lambda} / E_d$.

Для оценки величины плотности тока была найдена концентрация электронов в зоне проводимости КП из уравнения электронейтральности для примесной электропроводности при низких температурах [10]:

$$n_e \approx N_D - n_D, \quad (7)$$

где $n_e = \sqrt{2m^*kT} / (\hbar S) \sum_{n_1, n_2} F_{-1/2}(\eta_{n_1, n_2})$ – концентрация электронов в КП; $\hbar = h / 2\pi$; h – постоянная Планка; S – площадь поперечного сечения КП; $\eta_{n_1, n_2} = (E_F - E_{n_1, n_2}) / (kT)$; E_F – энергия Ферми; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; $F_{-1/2}(\eta_{n_1, n_2}) = \int_0^{+\infty} \varepsilon^{-1/2} f_0(\varepsilon, \eta_{n_1, n_2}) d\varepsilon$ – интеграл Ферми [10], $f_0(\varepsilon, \eta_{n_1, n_2}) = (\exp(\varepsilon - \eta_{n_1, n_2}) + 1)^{-1}$ – функция распределения Ферми – Дирака [10]; N_D – концентрация доноров в КП; n_D – концентрация электронов на донорных примесях.

Условие низких температур сводится к неравенству

$$T \ll \frac{\pi m^* \overline{E_D}^2}{8k h^2 S^2 N_D^2}, \quad (8)$$

здесь $\overline{E_D} = \overline{E_{0,0,0}} - \overline{E_\lambda}$ – средняя энергия связи донорной примеси.

При оценке плотности тока зависимость подвижности электронов от напряженности электрического поля полагалась не слишком сильной [11].

Результаты

Для оценки ширины примесного уровня $\hbar\Gamma_\lambda$ в уравнении (6) использовались значения уширений из работы [6], так как предполагалось, что уширения уровней электрона в зоне проводимости КП с параболическим удерживающим потенциалом незначительно меньше аналогичных уширений для КЯ с прямоугольным удерживающим потенциалом [6]. На рис. 2 представлена зависимость ширины примесного уровня электрона от напряженности электрического поля, имеющая сильно нелинейный характер (см. кривые 1 и 2 на рис. 2). Это обусловлено (по данным работы [6]) соответствующей полевой зависимостью уширения уровней размерного квантования электрона в одномерной потенциальной яме вдоль оси КП (кривая 3 – уширение первого уровня размерного квантования в КП).

На рис. 3 показаны результаты численного анализа дисперсионного уравнения (6), определяющего зависимость средней энергии примесного уровня $\overline{E_\lambda}$ от величины напряженности продольного электрического поля \overline{F} , параметров удерживающего потенциала КП на основе InSb, характеристик примеси $|E_i|$, $\overline{R_a} = (x_a, y_a, z_a)$.

Как видно из рис. 3, увеличение напряженности электрического поля приводит к сильному уменьшению средней энергии основного состояния электрона (кривая 5), что объясняется квантово-размерным эффектом Штарка для одноэлектронных состояний в КП [12]. Так как волновая функция элек-

трона на примеси формируется из электронных состояний зоны проводимости, то происходит смещение примесного уровня в электрическом поле. Однако это смещение происходит только вблизи значения поля ионизации (см. переход примесных уровней 1–4 в уровень основного состояния 5 на рис. 3). В связи с этим динамика уровней размерного квантования и примесного уровня в электрическом поле приводит при определенном значении напряженности к ионизации примеси. При большем значении энергии связи примеси в объемном полупроводнике примесный уровень в КП расположен глубже, и поэтому термоэлектрическая ионизация происходит при большем значении напряженности поля (см. кривые 1–4, рис. 3).

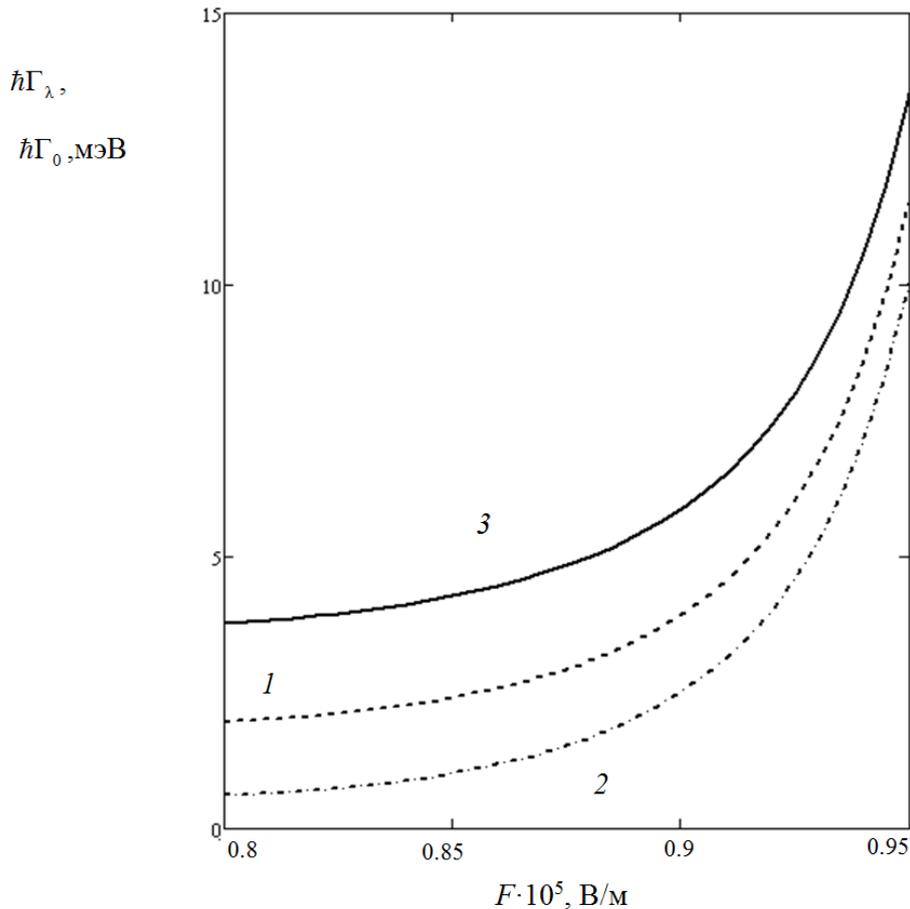


Рис. 2. Зависимость ширины примесного уровня $\hbar\Gamma_\lambda$ (для $D^{(-)}$ -центра в КП на основе InSb) от значения напряженности продольного электрического поля F (кривая 3 показывает зависимость ширины уровня $\hbar\Gamma_0$ основного состояния электрона в КП от F [6]): $L = 71,6$ нм; $L_z = 716$ нм; $V_{0x} = V_{0y} = 0,2$ эВ; $V_{0z} = 0,02$ эВ; $x_a = 0$; $y_a = 0$; $z_a = 0$; кривые: 1 – $|E_i| = 2 \times 10^{-3}$ эВ; 2 – $|E_i| = 6 \times 10^{-3}$ эВ

Таким образом, в КП, содержащей примеси, в продольном электрическом поле в условиях низких температур происходит явление термоэлектри-

ческой ионизации, приводящее к увеличению концентрации свободных электронов в зоне проводимости КП. В объемных полупроводниках данный эффект носит название эффекта Френкеля [10].

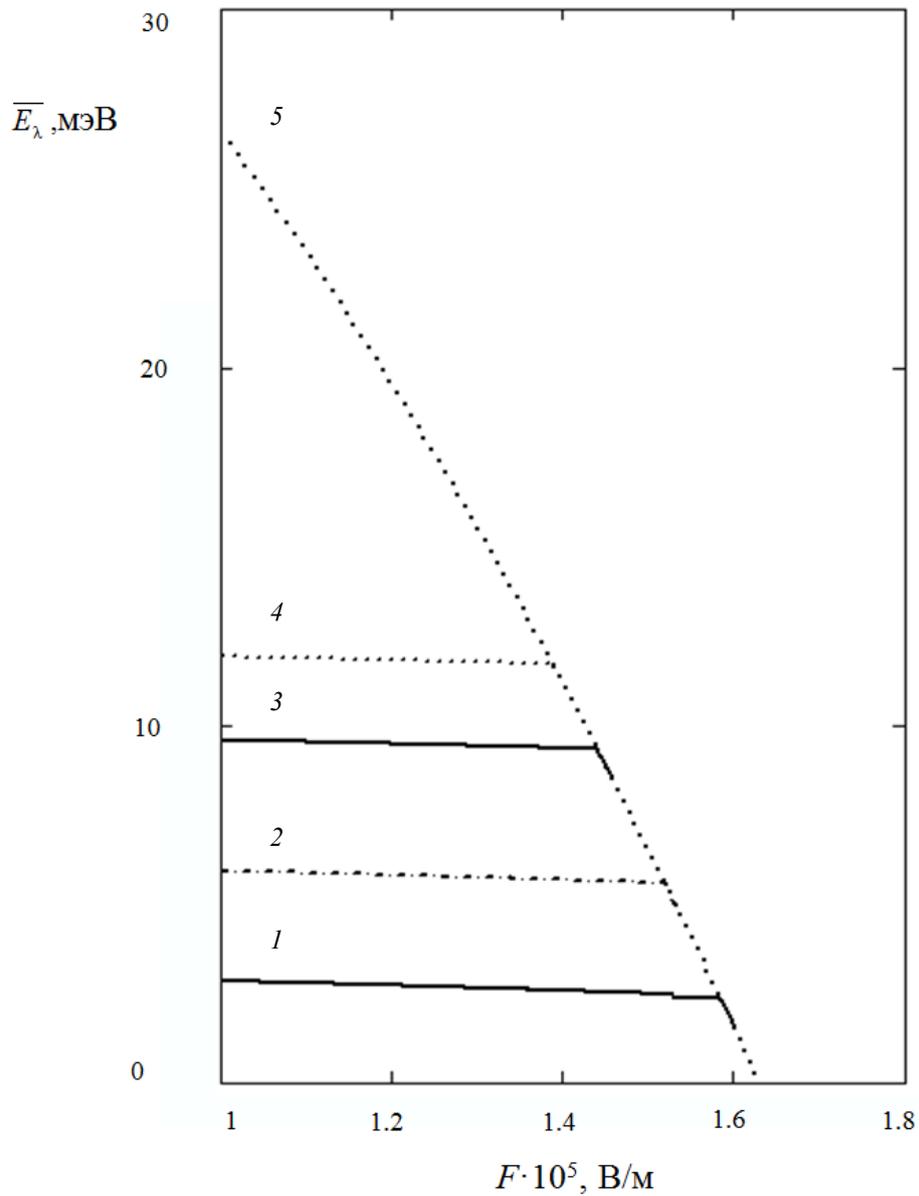


Рис. 3. Зависимость средней энергии примесного уровня \overline{E}_λ (для $D^{(-)}$ -центра в КП на основе InSb) от значения напряженности продольного электрического поля F (кривая 5 показывает зависимость средней энергии $\overline{E}_{0,0,0}$ основного состояния электрона в КП от F): $L = 71,6$ нм; $L_z = 716$ нм; $V_{0x} = V_{0y} = 0,2$ эВ; $V_{0z} = 0,02$ эВ;

$$x_a = 0; y_a = 0; z_a = 0; \text{ кривые: } 1 - |E_i| = 6 \times 10^{-3} \text{ эВ; } 2 - |E_i| = 4 \times 10^{-3} \text{ эВ;}$$

$$3 - |E_i| = 2 \times 10^{-3} \text{ эВ; } 4 - |E_i| = 1 \times 10^{-3} \text{ эВ}$$

На рис. 4 изображена зависимость плотности тока \vec{j} в КП на основе InSb от напряженности электрического поля \vec{F} , которая имеет суперлинейный характер (в случае слабой зависимости подвижности электронов от напряженности электрического поля [11]).

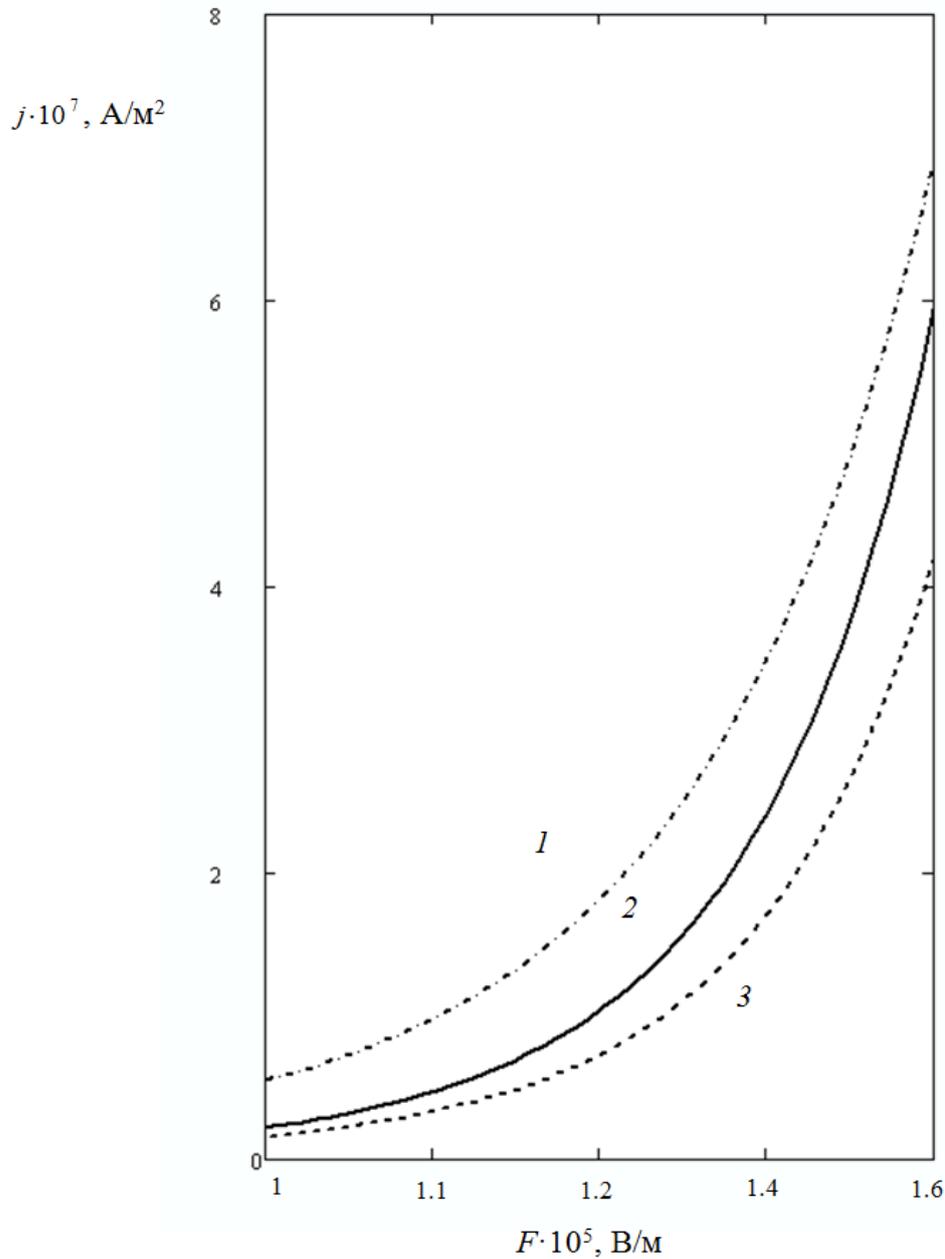


Рис. 4. Зависимость плотности тока j в КП на основе InSb от значения напряженности продольного электрического поля F : $L = 71,6$ нм; $L_z = 716$ нм; $V_{0x} = V_{0y} = 0,2$ эВ; $V_{0z} = 0,02$ эВ; $|E_i| = 2 \times 10^{-3}$ эВ, $\mu = 11$ м²/(В·с); кривые: 1 – $N_D = 10^{20}$ м⁻³, $T = 40$ К; 2 – $N_D = 10^{20}$ м⁻³, $T = 30$ К; 3 – $N_D = 0,5 \times 10^{20}$ м⁻³, $T = 30$ К

Резкое увеличение плотности тока происходит при значении напряженности, близкой к значению ионизации, когда практически все примеси являются ионизированными. Рост температуры ускоряет процесс ионизации (см. кривые 2 и 1 на рис. 4) и увеличивает плотность тока, что обусловлено соответствующей динамикой уровня Ферми. Увеличение концентрации примесных центров также приводит к росту плотности тока (см. кривые 3 и 2 на рис. 4).

Заключение

С фундаментальной точки зрения рассмотренный эффект термоэлектрической ионизации позволяет рассчитать среднюю энергию связи, определить концентрацию примесных состояний в КП и оценить температуру истощения примесей. С прикладной – дает возможность управлять концентрацией свободных носителей зарядов и, следовательно, электропроводностью КП. Кроме того, внешнее электрическое поле позволяет влиять на уширение примесных квазистационарных состояний, т.е. изменять их время жизни.

Таким образом, теоретически исследованные особенности термоэлектрической ионизации $D^{(-)}$ -состояний в КП во внешнем продольном электрическом поле могут быть использованы при расчетах полупроводниковых приборов с нелинейными вольт-амперными характеристиками, в которых генерация неравновесных носителей заряда происходит за счет управления квазистационарными состояниями.

Список литературы

1. **Завьялов, Д. В.** Влияние примесей на постоянную составляющую тока в квантовой нити в условиях совместного воздействия постоянного и переменного электрических полей / Д. В. Завьялов, С. В. Крючков // *Физика и техника полупроводников*. – 2008. – Т. 42, № 10. – С. 1223–1226.
2. Создание и исследование оптических свойств квантовых проволок InGaAs/GaAs / Н. А. Берг, С. А. Гуревич, Л. Г. Гладышева, С. О. Когновицкий, С. И. Кохановский, И. В. Кочнев, С. И. Нестеров, В. И. Скопина, В. Б. Смирницкий, В. В. Травников, С. И. Трошков, А. С. Усиков // *Физика и техника полупроводников*. – 1994. – Т. 28, № 9. – С. 1605–1612.
3. **Буравлев, Д. В.** Поглощение электромагнитного излучения электронами наносферы / Д. В. Буравлев, В. А. Маргулис // *Физика твердого тела*. – 2002. – Т. 44, № 9. – С. 1557–1567.
4. **Рувинский, М. А.** О влиянии флуктуации толщины на статическую электропроводность полупроводниковой квантовой проволоки / М. А. Рувинский, Б. М. Рувинский // *Физика и техника полупроводников*. – 2005. – Т. 39, № 2. – С. 247–250.
5. **Синявский, Э. П.** Влияние поперечного электрического поля на подвижность в нанопроволоках / Э. П. Синявский, С. А. Карапетян // *Физика и техника полупроводников*. – 2012. – Т. 46, № 8. – С. 1032–1034.
6. **Лазаренкова, О. Л.** Энергетический спектр неидеальной квантовой ямы в электрическом поле / О. Л. Лазаренкова, А. Н. Пихтин // *Физика и техника полупроводников*. – 1998. – Т. 32, № 9. – С. 1108–1113.
7. **Кревчик, В. Д.** Эффект увлечения одномерных электронов при фотоионизации $D^{(-)}$ -центров в продольном магнитном поле / В. Д. Кревчик // *Физика твердого тела*. – 2003. – Т. 45, № 7. – С. 1272–1279.
8. **Никифоров, А. Ф.** Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М. : Наука, 1978. – 320 с.

9. **Krevchik, V. D.** Quantum dimensional Zeeman effect in magneto-optical absorption spectrum for “quantum dot – impurity center” systems / V. D. Krevchik, A. B. Grunin, A. K. Aringazin, M. B. Semenov // *Hadronic Journal*. – 2002. – Vol. 25, № 1. – P. 23–40.
10. **Фистуль, В. И.** Введение в физику полупроводников / В. И. Фистуль. – М. : Высшая школа, 1975. – 250 с.
11. **Синявский, Э. П.** Особенности подвижности в нанопроволоках в поперечных электрическом и магнитном полях / Э. П. Синявский, С. А. Карапетян // *Физика и техника полупроводников*. – 2014. – Т. 48, № 2. – С. 229–237.
12. **Покутний, С. И.** Квантово-размерный эффект Штарка в квазиульмерных полупроводниковых наноструктурах // *Физика и техника полупроводников*. – 2000. – Т. 34, № 9. – С. 1120–1124.

References

1. Zav'yalov D. V., Kryuchkov S. V. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 2008, vol. 42, no. 10, pp. 1223–1226.
2. Bert N. A., Gurevich S. A., Gladysheva L. G., Kognovitskiy S. O., Kokhanovskiy S. I., Kochnev I. V., Nesterov S. I., Skopina V. I., Smirnitkiy V. B., Travnikov V. V., Troshkov S. I., Usikov A. S. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 1994, vol. 28, no. 9, pp. 1605–1612.
3. Buravlev D. V., Margulis V. A. *Fizika tverdogo tela* [Solid state physics]. 2002, vol. 44, no. 9, pp. 1557–1567.
4. Ruvinskiy M. A., Ruvinskiy B. M. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 2005, vol. 39, no. 2, pp. 247–250.
5. Sinyavskiy E. P., Karapetyan S. A. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 2012, vol. 46, no. 8, pp. 1032–1034.
6. Lazarenkova O. L., Pikhtin A. N. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 1998, vol. 32, no. 9, pp. 1108–1113.
7. Krevchik V. D. *Fizika tverdogo tela* [Solid state physics]. 2003, vol. 45, no. 7, pp. 1272–1279.
8. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. *Spetsial'nye funktsii matematicheskoy fiziki* [Special functions of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1978, 320 p.
9. Krevchik V. D., Grunin A. B., Aringazin A. K., Semenov M. B. *Hadronic Journal*. 2002, vol. 25, no. 1, pp. 23–40.
10. Fistul' V. I. *Vvedenie v fiziku poluprovodnikov* [Introduction into semiconductor physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1975, 250 p.
11. Sinyavskiy E. P., Karapetyan S. A. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 2014, vol. 48, no. 2, pp. 229–237.
12. Pokutniy S. I. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 2000, vol. 34, no. 9, pp. 1120–1124.

Грунин Александр Борисович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра физики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: grunin.sky@uandex.ru

Grunin Aleksandr Borisovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of physics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Кириллов Илья Андреевич

аспирант, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: kirillov.ia1990@yandex.ru

Kirillov Ilya Andreevich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 621.315.592

Грунин, А. Б.

Особенности электропроводимости квантовых проволок, связанные с электростатической ионизацией $D^{(-)}$ -состояний / А. Б. Грунин, И. А. Кириллов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 114–126. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-10

Внимание авторов!

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows (тип файла – RTF, DOC).

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах. Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полупетельный интервал. Статья **обязательно** должна содержать индекс УДК, ключевые слова и развернутую аннотацию объемом от 100 до 250 слов, имеющую четкую структуру **на русском** (Актуальность и цели. Материал и методы. Результаты. Выводы) **и английском языках** (Background. Materials and methods. Results. Conclusions).

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями.

Формулы в тексте статьи **обязательно** должны быть набраны в редакторе формул Microsoft Word Equation (версия 3.0) или MathType. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. **Требования к оформлению списка литературы** на русские и иностранные источники: **для книг** – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; **для журнальных статей, сборников трудов** – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; **для материалов конференций** – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам статьи **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание и должность, место и юридический адрес работы (на русском и английском языках), e-mail, контактные телефоны (желательно сотовые).

Обращаем внимание авторов на то, что перевод имен собственных на английский язык в списке литературы осуществляется автоматически с использованием программы транслитерации в кодировке BGN (сайт translit.ru). Для обеспечения единообразия указания данных об авторах статей во всех реферируемых базах при формировании авторской справки при подаче статьи необходимо предоставить перевод фамилии, имени, отчества каждого автора на английский язык, или он будет осуществлен автоматически в программе транслитерации в кодировке BGN.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Рукопись, полученная редакцией, не возвращается. Редакция оставляет за собой право проводить редакционную и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год по тематике:

- ***математика***
- ***физика***
- ***механика***

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. (841-2) 36-84-87. E-mail: VolgaVuz@mail.ru

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» на 20__ г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____

(подпись)

(ФИО)

Дата «____» _____ 20__ г.